Der logarithmische Zirkel

Werner H. Rudowski

Einleitung

Addiert man die Logarithmen zweier Zahlen, so liest man aus der Logarithmentafel das Produkt der Multiplikation beider Zahlen ab. Wie aber erhält man den Logarithmus der Summe zweier Zahlen, von denen jeweils der Logarithmus bekannt ist?
Bekannt: *log a* und *log b*
Gesucht: *log (a + b)*
Natürlich könnte man die Numeri beider Logarithmen nachschlagen, sie addieren und zu der Summe den Logarithmus aufsuchen. Einen einfacheren Weg hat man Anfang des 19. Jahrhunderts gefunden: die Additions- und Subtraktionslogarithmen. Ein ungewöhnliches exotisches Nebenprodukt davon ist der ***logarithmische Zirkel*** (Bild 1), mit dessen Hilfe Aufgaben graphisch gelöst werden können.

Bild 1: Modellsammlung des Mathematischen Instituts, Universität Göttingen

Um ihn zu verstehen, müssen zunächst die Additions- und Subtraktionslogarithmen kurz erläutert werden.

Additions- und Subtraktionslogarithmen

In seinem Beitrag „C.F. Gauß und die Logarithmen“ [1] hat Dr. Klaus Kühn Geschichte und Wesen dieser heute weitgehend unbekannten Logarithmen ausführlich behandelt. Erstmals hat sie 1806 LEONELLI entwickelt und beschrieben. CARL FRIEDRICH GAUß hat sie 1812 populär gemacht und einfachere Tafeln herausgegeben – bekannt geworden als *Gaußische Logarithmen* [2]. Diese Tafeln haben drei Spalten, bezeichnet A, B und C (Bild 2).

Darin bedeutet:
A = log a – log b
Mit diesem Wert liest man in *B* oder *C* einen Wert (Logarithmus) ab, zu dem dann der Logarithmus der kleineren Zahl (*B*) oder der größeren (*C*) addiert werden muss, um den gesuchten Logarithmus *log (a + b)* zu erhalten.

log (a +b) = B + log a
oder *C + log b*

Nach LEONELLI und GAUß gilt:
A = C – B
A = log a – log b
$B = \log\,(1+{}^{1}/x)$
$C = \log\,(1 + x)$ — *x* bedeutet *a/b*

Beispiel:
log a = log 12 = 1,07918
log b = log 3 = 0,47712
log a – log b = A = 0,60206

B aus Tafel: *0,09691*
C aus Tafel: *0,69897*

log (a + b) = 0,09691 + 1,07918
= 1,17609 = log 15
oder *0,69897 + 0,47712*
= 1,17609 = log 15

XXXVI. *Tafel z. bequem. Berech d. Logarithm. etc.* 509

A	*B*		*C*		*A*	*B*		*C*	
0,560	0,10565	21	0,66565	79	0,600	0,09732	20	0,69732	80
0,561	0,10544	22	0,66644	78	0,601	0,09712	20	0,69812	80
0,562	0,10522	21	0,66722	79	0,602	0,09692	20	0,69892	80
0,563	0,10501	22	0,66801	78	0,603	0,09672	20	0,69972	80
0,564	0,10479	21	0,66879	79	0,604	0,09652	20	0,70052	80
0,565	0,10458	21	0,66958	79	0,605	0,09632	20	0,70132	80
0,566	0,10437	22	0,67037	78	0,606	0,09612	19	0,70212	81
0,567	0,10415	21	0,67115	79	0,607	0,09593	20	0,70293	80
0,568	0,10394	21	0,67194	79	0,608	0,09573	20	0,70373	80
0,569	0,10373	22	0,67273	78	0,609	0,09553	20	0,70453	80
0,570	0,10351	21	0,67351	79	0,610	0,09533	19	0,70533	81
0,571	0,10330	21	0,67430	79	0,611	0,09514	20	0,70614	80
0,572	0,10309	21	0,67509	79	0,612	0,09494	20	0,70694	80
0,573	0,10288	21	0,67588	79	0,613	0,09474	19	0,70774	81
0,574	0,10267	21	0,67667	79	0,614	0,09455	20	0,70855	80
0,575	0,10246	21	0,67746	79	0,615	0,09435	19	0,70935	81
0,576	0,10225	21	0,67825	79	0,616	0,09416	20	0,71016	80
0,577	0,10204	21	0,67904	79	0,617	0,09396	19	0,71096	81
0,578	0,10183	21	0,67983	79	0,618	0,09377	20	0,71177	80
0,579	0,10162	21	0,68062	79	0,619	0,09357	19	0,71257	81
0,580	0,10141	21	0,68141	79	0,620	0,09338	19	0,71338	81
0,581	0,10120	20	0,68220	80	0,621	0,09319	20	0,71419	80
0,582	0,10100	21	0,68300	79	0,622	0,09299	19	0,71499	81
0,583	0,10079	21	0,68379	79	0,623	0,09280	19	0,71580	81
0,584	0,10058	20	0,68458	80	0,624	0,09261	19	0,71661	81
0,585	0,10038	21	0,68538	79	0,625	0,09242	19	0,71742	81
0,586	0,10017	21	0,68617	79	0,626	0,09223	19	0,71823	81
0,587	0,09996	20	0,68696	80	0,627	0,09204	20	0,71904	80
0,588	0,09976	21	0,68776	79	0,628	0,09184	19	0,71984	81
0,589	0,09955	20	0,68855	80	0,629	0,09165	19	0,72065	81
0,590	0,09935	21	0,68935	79	0,630	0,09146	19	0,72146	81
0,591	0,09914	20	0,69014	80	0,631	0,09127	19	0,72227	81
0,592	0,09894	20	0,69094	80	0,632	0,09108	18	0,72308	82
0,593	0,09874	21	0,69174	79	0,633	0,09090	19	0,72390	81
0,594	0,09853	20	0,69253	80	0,634	0,09071	19	0,72471	81
0,595	0,09833	20	0,69333	80	0,635	0,09052	19	0,72552	81
0,596	0,09813	20	0,69413	80	0,636	0,09033	19	0,72633	81
0,597	0,09793	20	0,69493	80	0,637	0,09014	18	0,72714	82
0,598	0,09773	21	0,69573	79	0,638	0,08996	19	0,72796	81
0,599	0,09752	20	0,69652	80	0,639	0,08977	19	0,72877	81
0,600	0,09732		0,69732		0,640	0,08958		0,72958	

Mon. Corr. XXVI. B. 1812 L 1

Bild 2

Graphisches Rechnen mit der Additionskurve

Für das graphische Rechnen, z.B. in der Statik, hat DR. RUDOLF MEHMKE, Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, erstmals 1889 in der Zeitschrift Civilingenieur, Band 35, Seite 620 eine Additionskurve eingeführt (Bild 3).

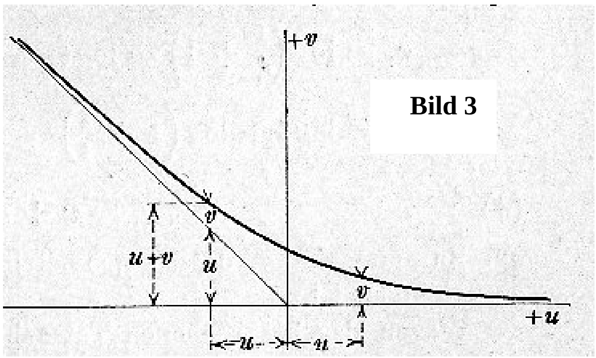


Bild 3

Mehmke bezeichnet die Differenz der Logarithmen *a* und *b*, die in den Tafeln nach Gauß als *A* gekennzeichnet ist, mit u und die Additionslogarithmen mit v (bei GAUß *B*). Trägt man v über u auf, so ergibt sich die dargestellte Additionskurve. Sie nähert sich sehr schnell asymptotisch der positiven u-Achse und der Winkelhalbierenden zwischen

der negativen u-Achse und der positiven v-Achse. Der negative Teil der Additionskurve entspricht den *C*-Werten in den Gaußischen Tafeln. Man sollte ihn benutzen, wenn der *A*-Wert (GAUß) bzw. der u-Wert (MEHMKE), d.h. die Differenz der Logarithmen beider Zahlen, sehr weit auseinanderliegen, weil sich die größeren Strecken genauer abgreifen lassen. An dem späteren Beispiel wird das deutlich. In seinem 1917 erstmals erschienenen *Leitfaden zum graphischen Rechnen* [3] beschreibt MEHMKE seine Additionskurve und die ergänzenden Subtraktions- und Hilfskurven ausführlich auf den Seiten 25 bis 33 (siehe Anhang). Für die praktische Anwendung ist auf der Innenseite des hinteren Buchdeckels eine Kurventafel eingeklebt (Bild 4).
Bemerkenswert ist die zugrundegelegte Längeneinheit von nur 2 cm für eine logarithmische Periode. Im Text gibt er aber auch die Werte für *die reichlich große Längeneinheit 10 cm* an.

Die Subtraktion

Wenn der Logarithmus der Summe zweier Zahlen sowie der Logarithmus einer dieser Zahlen bekannt sind, so kann der Logarithmus der zweiten Zahl zwar mit Hilfe der Additionskurve ermittelt werden, bequemer geht es aber mit der Subtraktionskurve, die MEHMKE 1890 (Zeitschrift f. Mathematik und Physik, Bd. 35, Seite 178) vorgestellt hat.
Um auch bei der Subtraktion genauere Werte mit dem Zirkel abgreifen zu können, wenn die Differenz der Logarithmen zweier Zahlen groß ist, hat MEHMKE letztlich noch die Hilfskurve eingeführt.

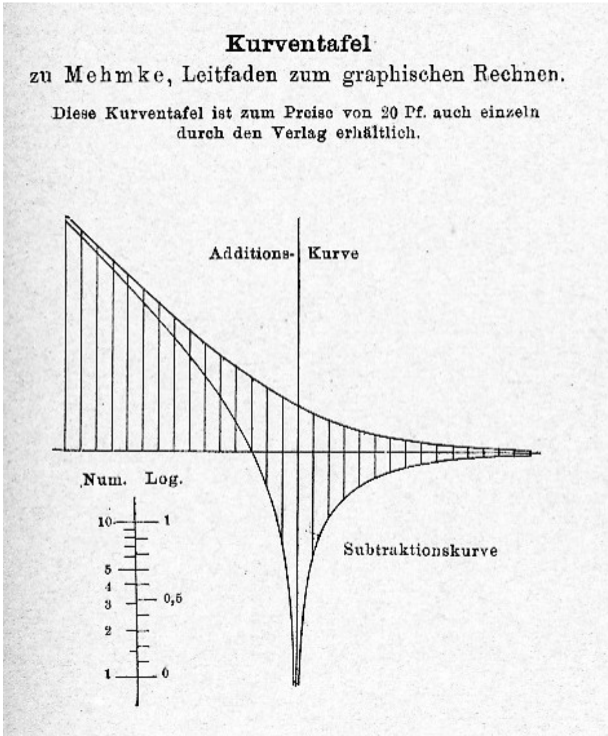
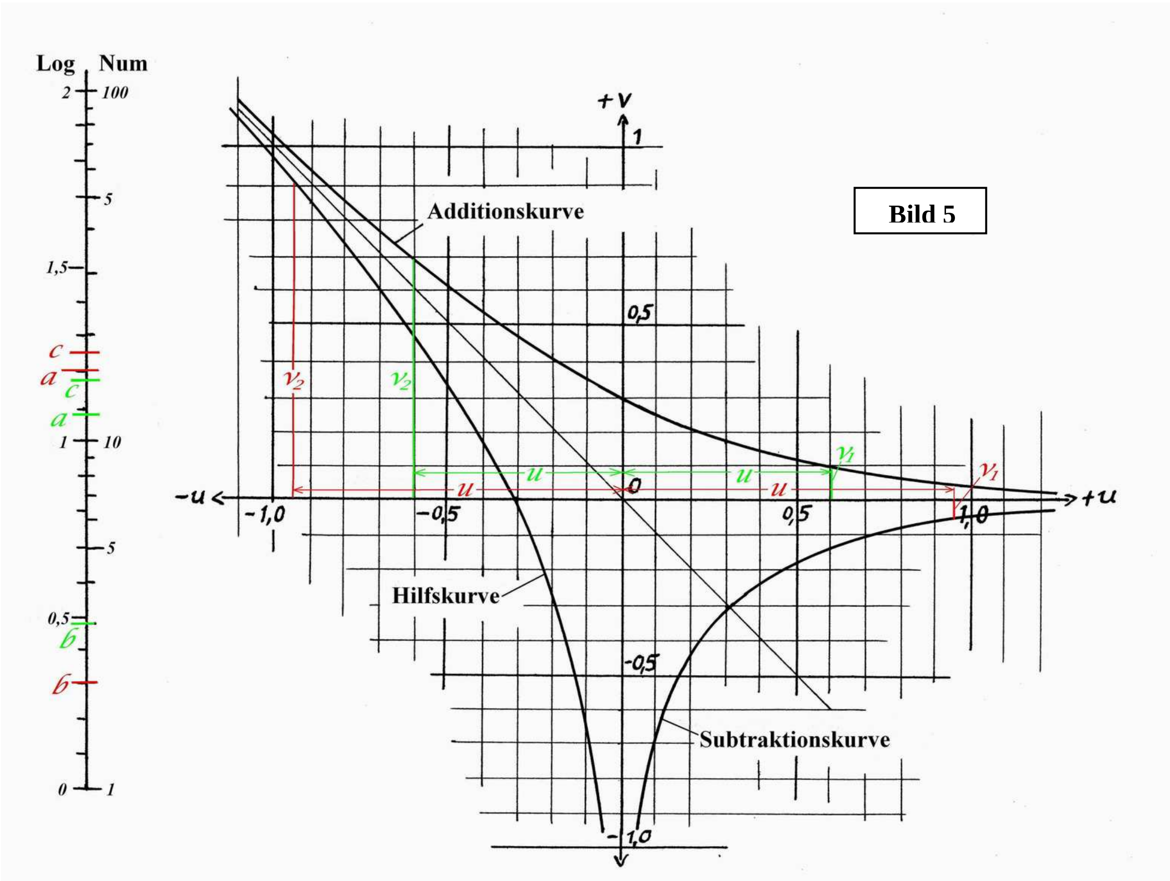


Bild 4

Beispiele

Das schon bei der Erläuterung der Additionslogarithmen benutzte Zahlenbeispiel soll auch hier die graphische Methode verdeutlichen. Dazu wurden die Kurven in größerem Maßstab (eine Längeneinheit beträgt ca. 5 cm) gezeichnet und mit dem Betrag der Logarithmen versehen (Bild 5).

Addition:
Bekannt sind: $\log a = \log 12 = 1{,}07918$
$\log b = \log 3 = 0{,}47712$
Man markiert $\log a$ und $\log b$ auf dem logarithmischen Maßstab und greift die Differenz u mit dem Stechzirkel ab. Bei $+u$ oder $-u$ der Additionskurve wird der v-Wert abgegriffen und auf den logarithmischen Maßstab bei $\log a$ (v_1-Wert von $+u$) oder bei $\log b$ (v_2 von $-u$) übertragen. Der neue Punkt *c* ergibt das Ergebnis $\log (a + b)$.
Man erkennt den Vorteil des negativen Astes der Additionskurve vor allem bei hohen u-Werten, weil die Ablesung auf dem positiven Ast sehr klein und damit ungenau ist.



Bei der **Subtraktion** *log (c – b)* wird ebenfalls zunächst die Differenz
log c – log b = log 18 – log 2 ermittelt:
$u = 1,25527 - 0,30103 = 0,95424$

Bei der Subtraktionskurve erhält man den negativen v_1-Wert (≈ 0,05, genauer 0,05115). Das Ergebnis *log a* ergibt sich zu

$\log c + v_1 = 1,25527 - 0,05115 = 1,20412 = \log 16$

Wenn die Differenz *log c – log b* groß ist, so benutzt man vorzugsweise die Hilfskurve und findet bei $-u$ = 0,95424 den positiven Wert *0,90309*. Hierzu addiert wird *log 2 = 0,30103* und man erhält rechnerisch *log (18-2) = 0,90309 + 0,30103 = 1,20412 = log 16*

Bei kleiner Differenz, d.h. u <0,3 (log 2) wird die Hilfskurve negativ.

MEHMKE betont immer wieder die Symmetrie der Kurven, und dass sie sich asymptotisch den Koordinaten bzw. der Winkelhalbierenden nähern.

In den vorigen Beispielen sind jeweils Zahlenwerte aufgeführt. Beim graphischen Rechnen wird jedoch mit Strecken bei vorgegebenem Maßstab gearbeitet. MEHMKES Kurventafel enthält deshalb keine Zahlen. Das erste Beispiel *log a = 1,07918* und *log b = 0,47712* ist im Bild 6 dargestellt.

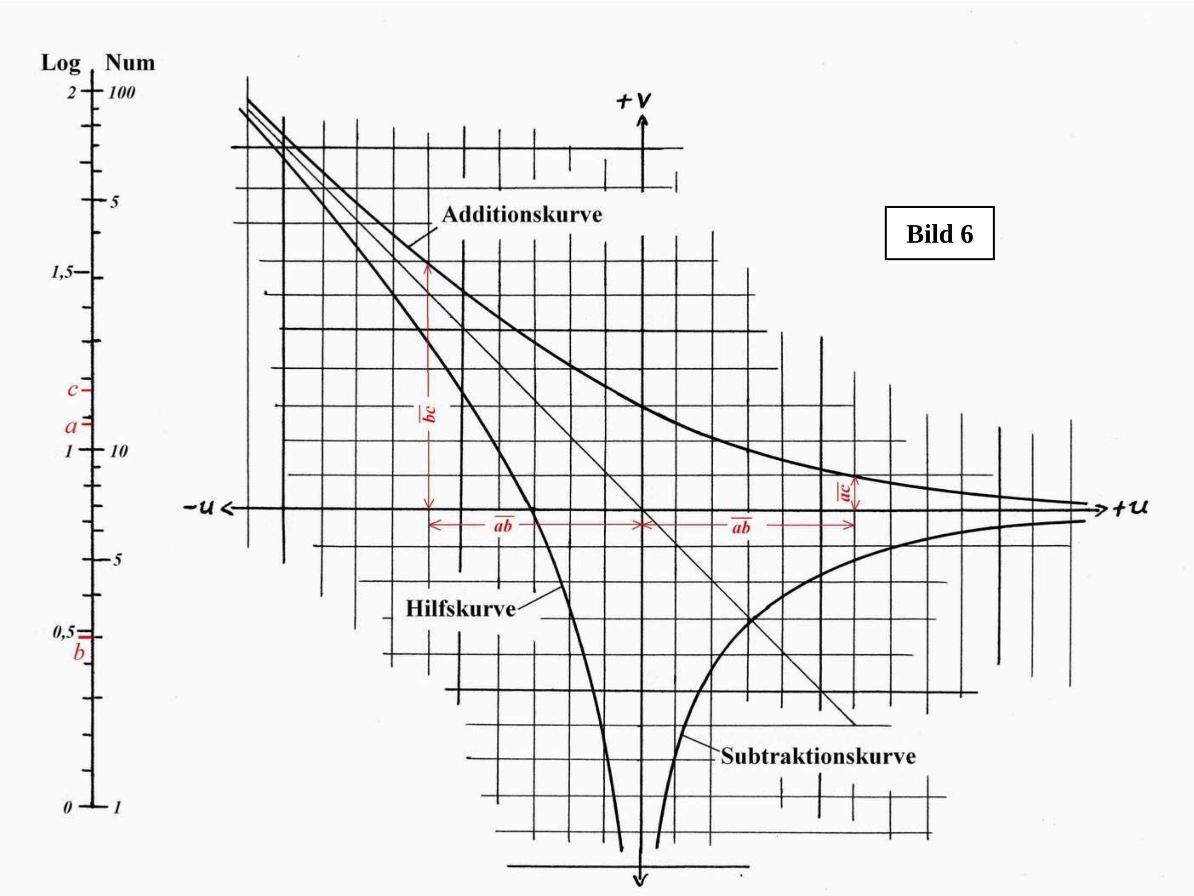


Bild 6

Mit dem Zirkel wird die Streckendifferenz $u = \overline{0a} - \overline{0b}$ abgegriffen und auf die u-Achse übertragen. Senkrecht dazu greift man nun den v-Wert ab und trägt ihn auf dem Maßstab bei *a* (positiver Ast der Additionskurve) bzw. bei *b* (wenn v auf dem negativen Ast abgegriffen wurde) an. In beiden Fällen erhält man *c* den Logarithmus von *a* + *b*.

Den Vorteil der Methode demonstriert ein Beispiel aus MEHMKES Leitfaden zum graphischen Rechnen: $y = 15 : \sqrt{x} + 5\,x\,\sqrt[3]{x}$

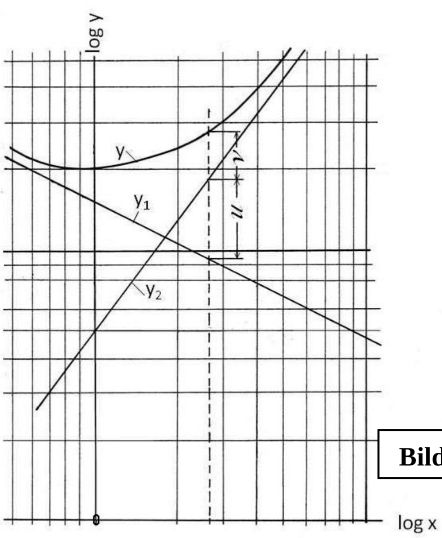


Bild 7a

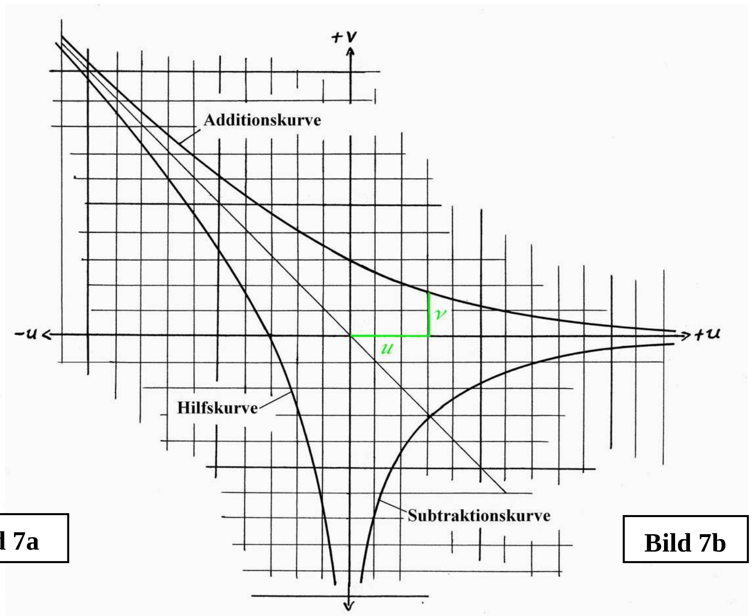


Bild 7b

Im Diagramm (Bild 7a) sind die beiden Teilgleichungen y_1 und y_2 als Geraden eingezeichnet. Die Summe ist bereits als Kurve eingetragen. Zu jeder beliebigen Parallele zur y-Achse kann aus der Differenz u der v-Wert aus der Additionskurve (Bild 7b) abgegriffen und übertragen werden. Schnell kann so die Gesamtfunktion graphisch dargestellt werden.

Der logarithmische Zirkel

Offensichtlich gehört zu jeder Differenz u, d. h. *log a – log b* (bei GAUß mit A bezeichnet) ein bestimmter v-Wert (B bzw. C bei GAUß), der mit dem Stechzirkel abgegriffen wird, wobei die eine Spitze des Zirkels auf der u-Achse verbleibt und der andere Schenkel lediglich um 90° gedreht wird. Dies hat MEHMKE zu der Überlegung gebracht, einen logarithmischen Zirkel zu entwickeln. Er hat dazu Professor E.A. BRAUER aus Karlsruhe angeregt, einen solchen Zirkel zu konstruieren (Bild 8). Erstmals wurde dieser ***logarithmische Zirkel*** in der „Mathematischen Ausstellung 1893 in München“ vorgestellt, die von Professor Walther Dyck organisiert war. Im Nachtrag 1893 zum Katalog [4] wird der Zirkel unter der Nr. 97a aufgeführt und beschrieben:

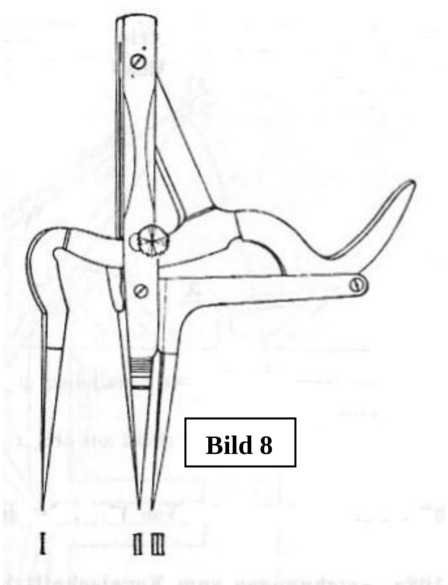


Bild 8

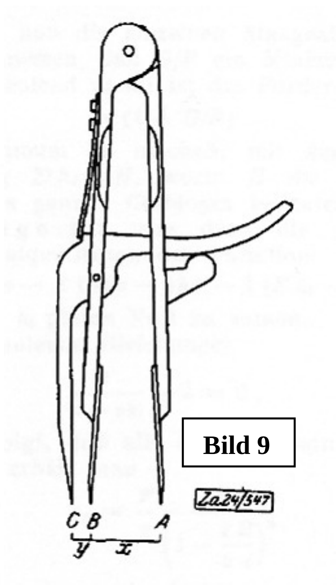


Bild 9

Dieser mit 3 Spitzen I,II und III versehene Zirkel ist so eingerichtet, dass, wenn zwischen die Spitzen I und II eine Strecke gefasst wird, deren Länge – mit einem Massstabe von 50 mm Längeneinheit gemessen – gleich log t ist, der Numerus t auf dem Teilbogen abgelesen werden kann, während die Spitzen II und III sich von selbst auf die Entfernung log $(1 + {}^{1}/_{t})$ *einstellen.*

Der logarithmische Zirkel erlaubt die mechanische Ausführung aller gewöhnlichen Rechnungen, besonders vorteilhaft erweist er sich aber bei der numerischen Auswertung ganzer Functionen und der Auflösung numerischer Gleichungen nach der logarithmisch-graphischen Methode.

Als Leihgeber des Zirkels wird Professor MEHMKE genannt. Es ist nicht bekannt, ob und ggfs. wo dieser Prototyp heute noch existiert.

Nachdem der Zirkel durch Beschreibung und Abbildung in MEHMKES *Leitfaden zum graphischen Rechnen* von 1917 [3] bekannter geworden ist, hat Professor BRAUER mit der damals weltweit führenden Reißzeug-Fabrik von E.O. Richter & Co. in Chemnitz eine vereinfachte Form entwickelt. (Bild 9) [5]. Die von Ernst O. Richter 1874 gegründete Firma hat hervorragende Reißzeuge für den Weltmarkt gefertigt und viele Patente erhalten, u.a. auch für den *Nullenzirkel.* Ob sich der Entschluss, diesen ***logarithmischen Zirkel*** herzustellen und zu liefern, für E.O. Richter ausgezahlt hat, ist fraglich. Bekannt sind bisher lediglich einige Exemplar in Universitäts-Sammlungen. Sie wurden nach 1917, aber vor 1924 (BRAUERS Artikel in [5]) gefertigt.

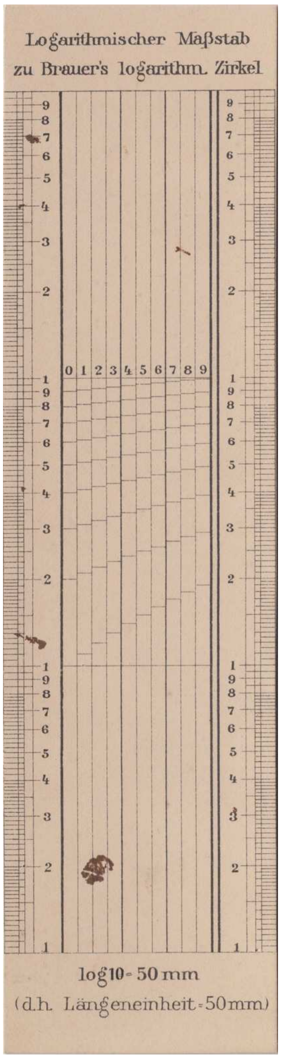
Auch BRAUER sieht die Anwendung des Zirkels vornehmlich in der graphischen Lösung höherer Gleichungen. Er erläutert nicht, wie er die Funktion v = f (u) für den Zirkel umgesetzt hat. Er schreibt nur, *dass die drei Spitzen A, B, C (bei Mehmke I, II, III) durch ein Kurvengetriebe so miteinander verbunden sind, dass bei Einstellung der Spitzen A und B auf zwei mit a und b bezifferte Punkte einer logarithmischen Skala sich die dritte Spitze zwangsläufig auf einen Punkt c derselben Skala einstellt, welcher der Gleichung c = a + b genügt*. Der Zirkel ist für E = 50 mm ausgeführt. Er umfasst das Zahlengebiet u = 0 bis u = 2. Die größte Entfernung der Spitzen A und B beträgt daher 2 x 50 = 100 mm, die größte Entfernung von B und C 0,301 x 50 = 15,05 mm. In den Bildern 10a und 10b sind annähernd die Extremstellungen dargestellt. Die Einheit 50 mm muss natürlich auch für die graphische Darstellung verwendet werden. Ein entsprechender Maßstab wurde mitgeliefert (Bild 11). Die Firma *Schleicher und Schüll* lieferte dazu geeignetes Speziallogarithmenpapier.

Gefertigt wurde der ***logarithmische Zirkel*** aus Neusilber mit Stahlspitzen. Seine Schenkellänge beträgt 165 mm. Wie Reißzeuge wurde auch der logarithmische Zirkel in einem mit Samt ausgeschlagenem Kasten (Bild 12) und einer kurzen Anleitung (Bild 13) geliefert.

Bild 10a

Bild 10b

Sammlung historischer Modelle des Instituts für Mathematik, Universität Halle



E.O. Richter & Co., Reißzeugfabrik
CHEMNITZ

Abteilung für Sonderinstrumente.

Logarithmischer Zirkel
von Geheimrat Professor E. A. Brauer in Karlsruhe.

Fig. I

Fig. 2

Maßstab 50 mm für log 10

Der logarithmische Zirkel besitzt außer den von Hand bewegten Spitzen A und B noch eine dritte Spitze C, die bei Einstellung der Entfernung x zwischen den Spitzen A und B sich zwangläufig so bewegt, daß die zwischen B und C entstehende Entfernung y der Gleichung

$$y = \log\left(1 + 10^{-x}\right)$$

entspricht, wobei als Einheit für x und y eine Strecke von 50 mm angenommen ist.

Hierdurch wird erreicht, daß, wenn man auf einer nach derselben Einheit, d. h. log 10 = 50 mm, ausgeführten logarithmischen Skala die Spitze A auf den Teilstrich für log a und die Spitze B auf log b setzt, wobei b größer als a angenommen ist, die Spitze C einen Teilstrich trifft, welcher dem log c = log (a + b) entspricht, so daß also log (a + b) aus log a und log b als Strecke gefunden werden kann, ohne die Grundzahlen a, b, c verwenden zu müssen.

Der Zirkel ist besonders geeignet zur Darstellung mehrgliedriger Ausdrücke in Gleichungen höheren Grades. Er vermittelt deren Lösung, indem aus den gerader Linien, als welche die einzelnen Glieder in logarithmischen Koordinaten abgebildet werden, eine Kurve abgeleitet wird, durch welche die reellen Wurzeln der Gleichung gefunden werden. Näheres über das Verfahren gibt der Leitfaden zum graphischen Rechnen von Prof. Dr. R. Mehmke in Stuttgart, der auch die Anregung zur Konstruktion des logarithmischen Zirkels gegeben hat.

Der logarithmische Zirkel wird in Präzisions-Ausführung in Neusilber mit Stahlspitzen geliefert.

Bild 11: Modellsammlung des Mathematischen Instituts, Universität Göttingen

Bild 13: Sammlung historischer Modelle des Instituts für Mathematik, Universität Halle

Bild 12: Sammlung historischer Modelle des Instituts für Mathematik, Universität Halle

Dank

Die Fotos 10a/b, 12 und 13 wurden 2010 von Herrn Norbert Kaltwaßer von der Universität Halle für die Sammlung historischer Modelle des Instituts für Mathematik der Universität Halle angefertigt. Frau Professor Dr. Karin Richter hat sie freundlicherweise zur Veröffentlichung übermittelt.
Herr Professor Dr. Laurent Bartholdi hat die Fotos 1 und 11 für die Modellsammlung des Mathematischen Instituts der Universität Göttingen aufgenommen und die Genehmigung zur Veröffentlichung erteilt.
Beiden Universitäten danke ich für die schnelle und unbürokratische Hilfe.

Literatur

[1] Kühn, Dr. Klaus: C.F. Gauß und die Logarithmen, in Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft Nr. 40 von 2003, und Rechenschieber-Brief Nr. 10 vom September 2003

[2] Gauß, Professor: Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Monatliche Correspondenz 1812. Nov.

[3] Mehmke, Dr. Rudolf: Leitfaden zum graphischen Rechnen; Leipzig und Berlin, 1917

[4] Dyck, Walther: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente; München 1892, nebst Nachtrag (Nachdruck Hildesheim, Zürich, New York 1994)

[5] Brauer, Professor Ernst A.: „Der logarithmische Zirkel“ in Zeitschrift für Mathematik und Mechanik, Band 4 von 1924

[./.] Meyer, Wilhelm Franz: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften….
Erster Band, zweiter Teil, Leipzig 1900 – 1904

Anhang: Mehmke: Leitfaden zum graphischen Rechnen

SAMMLUNG MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHER LEHRBÜCHER
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE
19

LEITFADEN ZUM GRAPHISCHEN RECHNEN

VON

Dr. RUDOLF MEHMKE
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN STUTTGART

Mit 121 Figuren im Text
und einer Additions- und Subtraktionskurve als Beilage

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1917

B. Anwendung logarithmischer Maßstäbe.

8. Multiplikation und Division. Ein logarithmischer Maßstab — auch logarithmische Teilung oder logarithmische Skala genannt — entsteht, wenn man mit Hilfe eines gewöhnlichen Maßstabs auf einer Geraden von einem und demselben Ursprung aus die Logarithmen einer Reihe von Zahlen als Strecken abträgt und an die Endpunkte die zugehörigen Zahlen schreibt (nicht die Werte der Logarithmen).[10]) Wegen $\log 1 = 0$ steht am Ursprung immer die Zahl 1, und weil die Logarithmen der echten Brüche negativ sind, so befinden sich die zugehörigen Teilstriche auf der negativen Seite des Ursprungs. Wir setzen im folgenden immer Logarithmen für die Grundzahl 10, sog. Briggssche oder gemeine Logarithmen voraus. Da bei ihnen $\log 10 = 1$ ist, so haben die Striche für 1 und 10 einen Abstand gleich der Längeneinheit des zu grunde gelegten gewöhnlichen Maßstabs (in Fig. 19 beträgt sie 2 cm). Daraus, daß beispielsweise:

$$\log 15 = \log 1{,}5 + 1,\ \log 150 = \log 1{,}5 + 2,$$
$$\log 0{,}15 = \log 1{,}5 - 1 \text{ usw.}$$

ist, allgemein aus der Gleichung:

$$\log(10^n x) = \log x + n$$

geht hervor, daß eine vollständige logarithmische Teilung sich aus unendlich vielen Abschnitten zusammensetzt, die alle kongruent zu dem Abschnitt zwischen den Teilstrichen für 1 und 10 sind.

Wie in Nr. **1** betrachten wir das Produkt und den Quotienten zweier Zahlen als besondere Fälle des Ausdrucks:

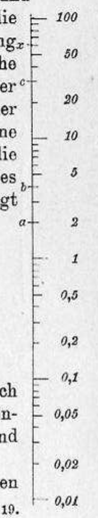


Fig. 19.

$$x = \frac{b}{a}\,c.$$

Zu den Logarithmen übergehend, kann man schreiben:

$$\log x - \log c = \log b - \log a,$$

10) Der Gedanke rührt von dem englichen Astronomen und Mathematiker Edmund Gunter her, der ihn nach Angabe der einen in dem Canon triangulorum, London 1620, veröffentlicht hat, nach andern erst 1623 in der zweiten Auflage jenes Tafelwerks unter dem Titel Description and use of the vector. Gunter nannte die logarithmische Teilung „line of number".

welche Gleichung besagt, daß (Fig. 19) die Strecke vom Strich für c bis zum Strich für x mit der Strecke vom Strich für a bis zum Strich für b gleich lang und gleich gerichtet ist. Der Punkt x läßt sich daher mit dem Zirkel finden, indem man die Strecke $\overline{ab}$, ohne ihre Richtung zu ändern, an den Punkt c anträgt.

9. Addition. Wir werden später häufig die Aufgabe zu lösen haben: *Wenn von zwei nicht selbst bekannten positiven Zahlen a und b die Logarithmen als Strecken gegeben sind, den Logarithmus ihrer Summe $(a+b)$ als Strecke zu bestimmen, ohne von den Logarithmen zu den Zahlen überzugehen.*

Angenommen, die Strecken $\log a$ und $\log b$ seien mit Beachtung des Vorzeichens auf einer Geraden von einem und demselben (in Fig. 20 mit 1 bezeichneten) Punkt abgetragen worden, und man habe an die Endpunkte die Buchstaben a und b geschrieben, gerade wie wenn es sich um die Herstellung einer logarithmischen Teilung handelte. (Es könnten auch a und b zwei gegebene Punkte einer logarithmischen Teilung vorstellen, an denen man die zugehörigen Zahlwerte nicht ablesen will.) Der Endpunkt der gesuchten, ebenfalls an den Punkt 1 angetragenen Strecke $\log c = \log(a+b)$ sei mit c bezeichnet. Es läßt sich beweisen, daß die Lage des Punktes c zum Punkt b nur von dem Abstand der Punkte a und b abhängt, genauer von Länge und Richtung der Strecke $\overline{ab}$. Man hat nämlich für die Strecken $\overline{ab}$ und $\overline{bc}$:

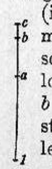


Fig. 20.

$$\overline{ab} = \overline{1b} - \overline{1a} = \log b - \log a = \log\frac{b}{a},$$

$$\overline{bc} = \overline{1c} - \overline{1b} = \log c - \log b = \log(a+b) - \log b$$

$$= \log\frac{a+b}{b} = \log\left(\frac{a}{b}+1\right) = \log\left(\frac{1}{\frac{b}{a}}+1\right).$$

Wenn daher

$$\frac{b}{a} = t$$

gesetzt wird, so kommt:

$$(1) \qquad \overline{ab} = \log t, \quad \overline{bc} = \log\left(\frac{1}{t}+1\right),$$

es ist also $\overline{bc}$ eine Funktion von t, und t eine Funktion von $\overline{ab}$, folglich mittelbar $\overline{bc}$ eine Funktion von $\overline{ab}$.

Jetzt betrachten wir t als veränderlich und führen die Größen u und v durch die Gleichungen ein:

$$(2) \qquad u = \log t, \quad v = \log\left(\frac{1}{t}+1\right).$$

Wir denken uns zu verschiedenen Werten von t die Werte von u und v berechnet und jedesmal in dem Maßstab, der dem logarithmischen Maßstab von Fig. 20 zu grunde liegt, als Cartesische Koordinaten eines Punktes aufgetragen. Die erhaltenen Punkte liegen auf einer Kurve, die wir *Additionskurve* nennen.[11]) Sie ist in Fig. 21 für eine Längeneinheit von 2 cm gezeichnet. Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt nun, daß wenn man $\overline{ab} = u$ setzt, sich $\overline{bc} = v$ ergibt. Hiernach läßt sich die obige Aufgabe mittels der Additionskurve in folgender Weise lösen:

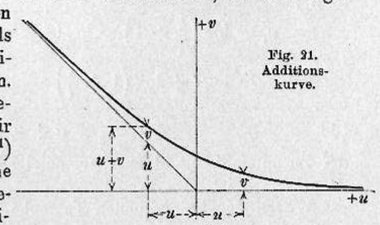


Fig. 21. Additionskurve.

Man nimmt die Strecke $\overline{ab}$ vom Punkt a bis zum Punkt b (Fig. 20) in den Zirkel, betrachtet sie als die Abszisse u eines Punktes der Additionskurve, greift die zugehörige Ordinate v ab und trägt sie an den Punkt b an, dann ergibt sich der gesuchte Punkt c.

In Fig. 20 ist angenommen, die Zahl b sei größer als die Zahl a, d. h. der Punkt b liege von a aus gesehen in positiver Richtung, so daß u positiv wird. Der Fig. 22 liegt die umgekehrte Annahme zu grunde, weshalb sich u hier negativ ergibt. Weil die Glieder einer Summe vertauschbar sind, so steht nichts im Wege, in Fig. 22 die positive Strecke vom Punkt b nach dem Punkt a zur Abszisse eines Punktes der Additionskurve zu machen, oder in Fig. 20 die negative Strecke von b nach a, und jedesmal die zugehörige Ordinate vom Punkt a weiter zu tragen. Die jedenfalls bestehende Tatsache, daß dann derselbe Punkt c wie vorher sich ergeben muß, führt zu einer Eigenschaft

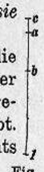


Fig. 22.

11) Die Additionskurve ist 1889 vom Verfasser eingeführt worden, s. die Zeitschrift Civilingenieur, Band 35, S. 620. Ihre Bedeutung ist für das graphische Rechnen dieselbe, wie die der sog. Additionslogarithmen, die G. Z. Leonelli 1806 erfunden hat, für das Zahlenrechnen.

der Additionskurve, die auch folgendermaßen hergeleitet werden kann. Ist u positiv und setzt man:

$$u_1 = -u, \tag{3}$$

so wird für $u_1 = \log t_1$:

$$\log t_1 = -\log t = \log \frac{1}{t}, \quad \text{oder} \quad t_1 = \frac{1}{t},$$

somit:

$$v_1 = \log\left(\frac{1}{t_1} + 1\right) = \log(t+1) = \log t\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$= \log t + \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

oder

$$v_1 = u + v, \tag{4}$$

ein Zusammenhang, dessen geometrische Bedeutung aus Fig. 21 zu erkennen ist.

Wegen der besprochenen Tatsache könnte man sich auf den zu positiven u gehörigen Teil der Additionskurve beschränken, da jedoch eine sehr kleine Strecke sich verhältnismäßig weniger genau abgreifen läßt, als eine größere, so ist es zweckmäßig, wenn die Punkte a und b weit auseinander liegen, den negativen Teil der Additionskurve zu benützen.

Von den Eigenschaften der Additionskurve kommen für uns noch folgende in Betracht. Nimmt man t positiv und läßt man diese Größe fortwährend zunehmen, so wächst, wie aus (2) zu ersehen ist, u über alle Grenzen, während sich die immer positive Größe v mehr und mehr der Null nähert; mit andern Worten: *Die positive u-Achse bildet eine Asymptote der Additionskurve.* Die Annäherung der Kurve an diese Asymptote ist eine so schnelle, daß z. B. für die (allerdings ziemlich kleine) Längeneinheit von Fig. 21 bereits bei $u = 1{,}9$ das zugehörige v unmerklich wird, sogar für die reichlich große Längeneinheit von 10 cm schon bei $u = 2{,}5$. Ferner geht aus der oben gefundenen Beziehung zwischen dem positiven und dem negativen Teil der Additionskurve hervor: *Die Halbierende des Winkels zwischen der negativen u-Achse und der positiven v-Achse ist eine zweite Asymptote,* wobei die Annäherung der Kurve an die Asymptote wieder sehr schnell erfolgt.

Das nachstehende Täfelchen reicht aus, um die Additionskurve noch für eine Längeneinheit von 10 cm aufzuzeichnen.[12])

12) Die Werte u, v entsprechen den Spalten in Leonellis Tafel von 1806, die später C. Fr. Gauss mit A und B überschrieben hat.

Koordinaten-Tafel für die Additionskurve.

u	v	u	v	u	v
0,0	0,301	1,0	0,041	2,0	0,004
0,1	0,254	1,1	0,033	2,1	0,003
0,2	0,212	1,2	0,027	2,2	0,003
0,3	0,176	1,3	0,021	2,3	0,002
0,4	0,146	1,4	0,017	2,4	0,002
0,5	0,119	1,5	0,014	2,5	0,001
0,6	0,097	1,6	0,011		
0,7	0,079	1,7	0,009		
0,8	0,064	1,8	0,007		
0,9	0,052	1,9	0,005		

Für die Anwendung noch bequemer als die Additionskurve ist der *logarithmische Zirkel* (Fig. 23) von Prof. E. A. Brauer an der technischen Hochschule in Karlsruhe.[13]) Er ist mit drei Spitzen I, II und III versehen und so eingerichtet, daß wenn man den Abstand der Spitzen I und II gleich u macht, von selbst der Abstand der Spitzen II und III gleich v wird. Wenn der Fig. 20 dieselbe Längeneinheit zu grunde liegt, wie dem benützten logarithmischen Zirkel, so braucht man nur die Spitze I auf den Punkt a und gleichzeitig die Spitze II auf den Punkt b zu setzen, dann wird unmittelbar die Spitze III den gesuchten Punkt c angeben.

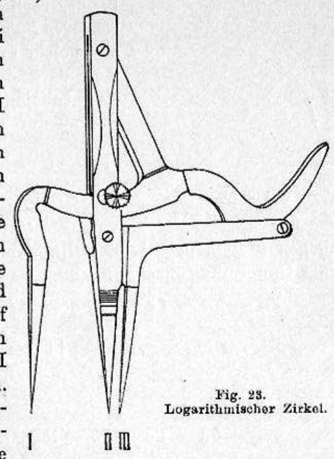


Fig. 23. Logarithmischer Zirkel.

10. Subtraktion. Als Gegenstück zu der in Nr. 9 gelösten Aufgabe liege nun die andere vor: *Den Logarithmus der Differenz $(c - b)$ zweier positiven Zahlen b und c, von denen b kleiner als c ist, als Strecke zu finden,*

13) Er wurde zuerst beschrieben in dem Nachtrag zu Dycks Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle usw., München 1893, S. 40.

unter der Voraussetzung, daß nicht b und c selbst, sondern ihre Logarithmen als Strecken gegeben sind.

Wenn die Strecken $\log b$ und $\log c$ nach Art der in Figur 24 und 25 wiederholten Figuren 20 und 22 schon in einer Geraden von einem Punkt aus abgetragen worden sind, so handelt es sich darum, zu den gegebenen Punkten b und c den unbekannten Punkt a zu bestimmen. Da aus $a = c - b$ folgt: $c = a + b$, so läßt sich die Aufgabe nach Nr. **9** mit Hilfe der Additionskurve lösen, indem man die immer positive Strecke $\overline{bc}$ als Ordinate v eines Punktes der Additionskurve ansieht und die zugehörige Abszisse u mit Beachtung des Vorzeichens an den Punkt b anträgt, wodurch der gesuchte Punkt a sich im Endpunkt der angetragenen Strecke ergibt.

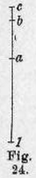


Fig. 24.

Fig. 25.

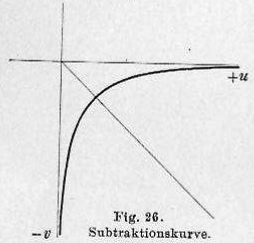


Fig. 26. Subtraktionskurve.

Statt der Additionskurve kann man sich bei der vorliegenden Aufgabe auch einer besonderen *Subtraktionskurve*[14]) bedienen, wie eine solche in Fig. 26 für die Längeneinheit 2 cm dargestellt ist. Die Koordinaten u, v eines beliebigen Punktes dieser Kurve stehen in dem durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad u = \log t, \quad v = \log\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

dargestellten Zusammenhang, wobei $t > 1$ vorausgesetzt ist, so daß u stets positiv, dagegen v stets negativ ausfällt. Ähnlich wie in Nr. **9** kann man die Umformung machen:

$$\overline{ca} = \overline{\mathrm{l}a} - \overline{\mathrm{l}c} = \log a - \log c = \log(c - b) - \log c$$
$$= \log\frac{c-b}{c} = \log\left(1 - \frac{b}{c}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{\frac{c}{b}}\right).$$

Anderseits ist:

$$\overline{bc} = \overline{\mathrm{l}c} - \overline{\mathrm{l}b} = \log c - \log b = \log\frac{c}{b},$$

oder für $\frac{c}{b} = t$:

$$(2) \qquad \overline{bc} = \log t, \quad \overline{ca} = \log\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

14) R. Mehmke, Zeitschr. f. Mathem. u. Physik. Bd. 35 (1890) S. 178.

Wenn daher $\overline{bc} = u$ gesetzt wird, so ist $\overline{ca} = v$. Das ergibt folgende Konstruktion:

Man betrachte die Strecke $\overline{bc}$ als Abszisse u eines Punktes der Subtraktionskurve, bestimme die zugehörige, immer negative Ordinate v und trage sie in negativer Richtung an den Punkt c an. Der Endpunkt der angetragenen Strecke ist der gesuchte Punkt a.

Unter den Eigenschaften der Subtraktionskurve sind die folgenden bemerkenswert: *1) Die Subtraktionskurve ist symmetrisch zur Halbierenden des Winkels zwischen der positiven u-Achse und der negativen v-Achse.* Setzt man nämlich $v' = -u$, so wird, wenn t' den zum Wertepaar u', v' von u, v gehörigen Wert von t bezeichnet:

$$v' = \log\left(1 - \frac{1}{t'}\right),$$

oder da:

$$-u = -\log t = \log\frac{1}{t}$$

ist:

$$\log\left(1 - \frac{1}{t'}\right) = \log\frac{1}{t}, \quad 1 - \frac{1}{t'} = \frac{1}{t}, \quad \frac{1}{t'} = 1 - \frac{1}{t}, \quad t' = \frac{1}{1 - \frac{1}{t}},$$

somit:

$$u' = \log t' = -\log\left(1 - \frac{1}{t}\right) = -v.$$

Die Gleichungen:

$$u' = -v, \quad v' = -u$$

drücken jedoch aus, daß die Punkte (u, v) und (u', v') symmetrisch zu der oben genannten Winkelhalbierenden sind.

2) Die Subtraktionskurve nähert sich asymptotisch der positiven u-Achse und der negativen v-Achse. Denn bei unbegrenzter Zunahme der positiven Größe t wächst den Gleichungen (1) zufolge u über alle Grenzen, während die immer negative Größe v sich unbegrenzt der Null nähert, also ist die positive u-Achse Asymptote der Kurve, und wegen der unter 1) bewiesenen Eigenschaft auch die negative v-Achse. Das unten folgende Täfelchen zeigt, daß die Annäherung an die Asymptoten bei der Subtraktionskurve eine ebenso schnelle ist, wie bei der Additionskurve.

Der in der Symmetrieachse liegende Punkt der Subtraktionskurve hat, weil für ihn $-u = +v$ oder

$$\frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{t}$$

ist, die Abszisse $u = \log 2$. Wegen der Symmetrie genügt es daher zum Aufzeichnen der Kurve, die Werte von u zu kennen, die $u > \log 2$ entsprechen.

Koordinaten-Tafel für die Subtraktionskurve.

u	v	u	v
0,301	— 0,301	1,2	— 0,028
0,4	— 0,220	1,4	— 0,018
0,5	— 0,165	1,6	— 0,011
0,6	— 0,126	1,8	— 0,007
0,7	— 0,097	2,0	— 0,004
0,8	— 0,075	2,2	— 0,003
0,9	— 0,058	2,4	— 0,002
1,0	— 0,046	2,6	— 0,001

Anm. Statt der Kurve in Fig. 26 könnte man auch die in Fig. 27 dargestellte Hilfskurve benützen, deren Punkte zu Koordinaten die Werte u_1, v_1 haben, die durch die Gleichungen

(3) $$u_1 = \log t_1, \quad v_1 = \log\left(\frac{1}{t_1} - 1\right)$$

für $t_1 < 1$ geliefert werden. Es ist nämlich in Fig. 24 oder 25:

$$\overline{cb} = \overline{1b} - \overline{1c} = \log b - \log c = \log \frac{b}{c},$$

$$\overline{ba} = \overline{1a} - \overline{1b} = \log a - \log b$$

$$= \log(c - b) - \log b = \log \frac{c-b}{b}$$

$$= \log\left(\frac{c}{b} - 1\right) = \log\left(\frac{1}{\frac{b}{c}} - 1\right).$$

Für $\frac{b}{c} = t_1$ ergibt sich daher:

(4) $$\overline{cb} = u_1, \quad \overline{ba} = v_1,$$

weshalb man, um aus den gegebenen Punkten b und c den Punkt a zu finden, die immer negative Strecke $\overline{cb}$ als Abszisse u_1 eines Punktes der Hilfskurve aufzufassen und die zugehörige Ordinate v_1 unter Beachtung des Vorzeichens an den Punkt b anzutragen hat.

Wenn die Punkte b und c weit auseinander liegen, so verdient aus demselben Grunde, der in Nr. **9** für die Verwendung des negativen Teils der Additionskurve geltend gemacht wurde, die Hilfskurve Fig. 27 den Vorzug vor der Subtraktionskurve Fig. 26, nämlich in sofern, als dann die Ordinaten niemals übermäßig klein werden. Es besteht auch zwischen den beiden Kurven Fig. 26 und 27 derselbe Zusammenhang, wie zwischen dem positiven und dem negativen Teil der Additionskurve; denn setzt man wie in Nr. **9** (3):

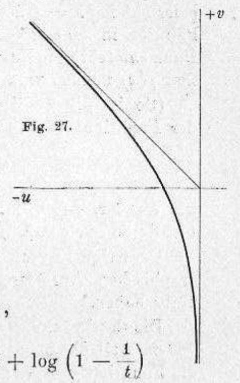


Fig. 27.

$$u_1 = -u,$$

so kommt:

$$\log t_1 = -\log t, \quad t_1 = \frac{1}{t},$$

$$v_1 = \log(t-1) = \log t\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \log t + \log\left(1 - \frac{1}{t}\right)$$

oder:

$$v_1 = u + v,$$

welche Gleichung mit Nr. **9** (4), S. 28 übereinstimmt.

Erwähnt sei noch, daß die Additionskurve und die Kurve Fig. 27 symmetrisch in bezug auf ihre gemeinsame Asymptote sind. Setzt man nämlich $u_1 = -v$, so folgt aus (3) und Nr. **9** (2): $v_1 = -u$.

Mit Hilfe des in Nr. **9** besprochenen logarithmischen Zirkels kann offenbar die in Rede stehende Aufgabe so gelöst werden: Man stellt die Spitze III (Fig. 23) auf den Punkt c, dagegen auf den Punkt b entweder die Spitze II oder die Spitze I, je nachdem der Fall Fig. 24 oder der Fall Fig. 25 vorliegt, d. h. je nachdem $\overline{bc} < \log 2$ oder $\overline{bc} > \log 2$ ist. Es gehört dazu keine lange Überlegung, weil $\log 2$ die größte Entfernung darstellt, welche die Spitzen II und III annehmen können. Der gesuchte Punkt a wird alsdann jedesmal durch die noch nicht verwendete Spitze angegeben.