DIE PROSTHAPHÄRESE
UND
JOHANNES WERNER
(1468 - 1528)

-

Vorläufer der Logarithmen

$$\sin a \bullet \sin c = \frac{1}{2}\{\sin((90° - a) + c) - \sin((90° - c) - a)\}$$

(für a+c< 90°)

von

Dr. Klaus Kühn

Alling-Biburg

1 Danksagungen/Widmungen

Der Autor widmet diese Arbeit Herrn Professor Dr. Menso Folkerts für seine stets freundliche Unterstützung der Sammlergemeinde historischer Rechenhilfsmittel und bedankt sich bei ihm besonders für den Hinweis auf die wichtigste Literaturstelle zur Prosthaphärese [Björnbo].

Frau Barbara Häberlin, Herrn Stephan Drechsler und Herrn Stephan Weiss sei für die kritischen Kommentare und Anregungen zur ursprünglichen Fassung der Arbeit gedankt.

Frau Magister Dr. Gerlinde Faustmann hat dankenswerterweise auf die Arbeiten von Jost Bürgi zum Beweis der prosthaphäretischen Formel hingewiesen.

2 Abstract

Johannes Werner (1468-1528), Pfarrer und Astronom, verbrachte die meiste Zeit seines Lebens in Nürnberg und ist derjenige, der um 1513 die prosthaphäretische Formel - der Begriff kommt aus dem Griechischen und steht für Addition und Subtraktion (siehe Formel im Titel) - in einem Manuskript festhielt. Besonders die gründliche Untersuchung von Axel Anthon Björnbo (1874-1911) [Björnbo] legt dazu inzwischen zahlreiche Hinweise vor. Ob Werner deren Eignung als Rechenmethode für die Multiplikation großer Zahlen bewusst war, lässt sich nicht mit Bestimmtheit sagen, liegt aber nahe. Sicher ist, dass es weder der Astronom Tycho Brahe (1546-1601) noch sein Schüler Paul Wittich (1555?-1587) waren, die diese Formel entdeckt hatten. Tycho Brahe war allerdings einer derjenigen, der die Prosthaphärese zu seiner Zeit - zwischen 1580 und 1601 - sehr intensiv zu (astronomischen) Berechnungen einsetzte.

In diesem Aufsatz werden die Hintergründe zur Darstellung und "Wiederentdeckung" der Prosthaphärese, deren Anwendungsbereiche und ein mathematisch-geometrischer Beweis der Formel auf Basis der relevanten Literatur aufgezeichnet.

English

Most of his life Johannes Werner (1468-1528) lived as priest and astronomer in Nuremberg, Germany. He firstly published the prosthapheretic (greek for addition and subtraction) formula ca. 1513 in a manuscript. Mainly the very intensive research by Axel Anthon Björnbo (1874-1911) [Björnbo] is supporting this. It is not exactly known if Werner was aware at that time of the advantageous use of the prosthapheretic formula for calculations with huge numbers. But it can be assumed, though. Meanwhile strong evidence shows, that neither the astronomer Tycho Brahe (1546-1601) nor his student Paul Wittich (1555?-1587) have invented the prosthapheretic formula. Tycho Brahe, though, was among the first, who - from 1580 to 1601 - intensively took advantage of the prosthapheretic formula for his astronomical calculations.

This paper reviews the historical background for the formulation and "reinvention" of the "prosthapheresis". On the basis of the relevant literature it gives some practical examples as well as the mathematical-geometrical proof of the formula.

3 Inhaltsverzeichnis

4 Einleitung

Seit jeher versuchen die Menschen, Methoden zu finden, um sich Rechenvorgänge zu erleichtern. Dabei spielte es keine Rolle, wie schwierig die Rechnungen waren - Ziel war es immer, den erforderlichen Rechenaufwand zu verringern, ohne an Genauigkeit einzubüßen.

Besonders in der Astronomie, aus der sich die Mathematik erst entwickelt hat, waren (und sind) Berechnungen mit großen Zahlen erforderlich, deren Lösungen einen sehr hohen Aufwand erforderten. Dies betraf auch die Grundrechenarten wie das Multiplizieren, das möglichst vereinfacht werden sollte, z.B., indem das Multiplizieren auf eine Addition zurückgeführt werden konnte.

Das bekannteste Beispiel für diesen Weg sind die Logarithmen, die 1614 von John Napier (1550-1617) in einer ersten Logarithmentafel (Mirifici Canonis Logarithmorum Descriptio) in Edinburgh veröffentlicht wurden. Doch was war bis dahin? Wie haben die Astronomen ohne Kenntnis der Logarithmen gerechnet?

Sie haben zuvor etwa hundert Jahre lang mit der Prosthaphärese (engl. prosthaphaeresis), auch Postaphärese oder Prostaphairesis geschrieben, gearbeitet.

Immer wieder tauchen in der Literatur zum Thema Prosthaphärese falsche Zuordnungen zu deren Ursprung auf. Meist wird die Entdeckung dem Astronomen Tycho Brahe oder seinem Schüler Paul Wittich oder auch Christopher Clavius zugeschrieben. Brian Borchers hat in seinem Artikel im JOS [Borchers] eine kurze Übersicht über die Prosthaphärese und deren Geschichte gegeben und dabei auf deren Ursprung bei Johannes Werner hingewiesen. Borchers' Artikel stellt die Ausgangsbasis für diese Arbeit dar, in der die Hintergründe zur prosthaphäretischen Formel und zur Prosthaphärese aus geschichtlicher und mathematischer Sicht verdeutlicht werden.

Der Begriff "Prosthaphärese" - man füge hinzu und nehme weg - wird auch in der Astronomie vor einem anderen Hintergrund verwendet; so spricht man z.B. von der prosthaphäresis im Zusammenhang mit äquinoctiorum; eccentrititatis; latitudinis; nodi pro eclipsius; orbis; tychonis; nodorum - "Der wahre Knoten bewegt sich nicht gleichmäßig fort, er läuft langsamer, wenn die Sonne sich in der Nähe der Knoten befindet, schneller, wenn die Sonne sich von ihnen entfernt." [Bialas]. Dieser rein astronomische Begriff ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Als Entdecker der Prosthaphärese ist Johannes Werner (1468 - 1528) zu sehen. Die wesentlichen Erkenntnisse zur Prosthaphärese des Johannes Werner stammen aus einer Arbeit von Axel Anthon Björnbo [Björnbo]. Als Schüler des Wissenschaftshistorikers Anton von Braunmühl nahm er dessen Hinweis auf einige Ungereimtheiten auf und ging 1901 nach Rom, um dort das entsprechende antike Material in der vatikanischen Bibliothek zu sichten und zu studieren. Besonderes Interesse fand bei ihm eine Handschrift ohne Datierungen und Figuren mit dem Titel: I. Joannis Verneri Norimbergensis de triangulis sphaericis in vier Büchern sowie II. Joannis Verneri Norimbergensis de meteoroscopiis in sechs Büchern. Königin Christina hat diese Handschrift des Johannes Werner, die inzwischen in den Besitz des Jakob Christmann (1554 - 1613) gelangt war, wahrscheinlich erst zwischen 1654 und 1689 erhalten. Nach ihrem Tode (1689) lag diese Handschrift (Codex Reginensis latinus 1259, d.h. Nr. 1259 der Regina Sveciae-Sammlung) fast unbeachtet im Vatikan. Bei den weiteren Untersuchungen kristallisierte sich heraus, dass Werner zwar der Verfasser bzw. Autor der beiden handschriftlichen Teile war, er aber nicht deren Schreiber war. Als Schreiber identifizierte Björnbo einen mathematisch nicht versierten professionellen Schönschreiber jener Zeit [Björnbo; Seiten 140, 141, 171].

Der Text des ersten vollständigen Teiles der Handschrift (*de triangulis sphaericis*) findet sich bei Björnbo [Björnbo; Kapitel 1] auf den Seiten 1 - 133. Daran anschliessend hat Björnbo seine Erkenntnisse zu dieser Handschrift sowohl in den "Herausgeberbemerkungen" [Björnbo; Kapitel 3] wie auch in der "Textgeschichte" [Björnbo; Kapitel 4] in einem sehr ausführlichen und detaillierten Recherchebericht dargestellt.

Auf die umfangreichen Inhalte der Handschrift wird in diesem Artikel nicht näher eingegangen. Es soll aber nicht unerwähnt bleiben, dass als Neuerung auch die Einteilung/Gliederung der Bücher über die Kugeldreiecke zu sehen ist [Björnbo; Kapitel 1 und Seite 163] :

1. **Klarlegung der verschiedenen möglichen Dreiecksformen (Buch I)**
   a. **Diskussion des sphärischen Dreiecks**

2. **Auflösungen vom rechtwinkligen Dreieck (Buch II)**
   a. **Die sphärisch-trigonometrischen Grundformeln**
   b. **Die Auflösung des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks**

3. **Auflösungen des schiefwinkligen Dreiecks (Buch III und IV)**
   a. Die Auflösung des schiefwinkligen Dreiecks durch Zerlegung inrechtwinklige Dreiecke (III)
   b. Die Auflösung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch den prosthaphäretisch umgebildeten Cosinussatz (IV)

Die oben angeführten drei Kategorien gliederten auch den Inhalt des *Opus Palatinum* des Rheticus von 1596, sofern es sich dort um sphärische Dreiecke handelte.

Im 5. Kapitel hat [Björnbo; ab Seite 177] tabellarisch die Struktur der Inhalte der einzelnen Bücher dargelegt und übersichtlich zusammengefasst.

Somit stellen die Erkenntnisse von Björnbo eine sehr gut fundierte Basis für die weiteren Ausführungen dar, die zum einen die Vermutungen von Anton von Braunmühl [von Braunmühl 1897] zur Urheberschaft der prosthaphäretischen Formel bestätigten, zum anderen durch neuere Erkenntnisse von David A. King [King] und Victor E. Thoren [Thoren] aktualisiert werden.

5 Geschichtliches

Die historischen Erkenntnisse zur Prosthaphärese sind in der im Anhang befindlichen Zeittafel zusammengefasst, die sich aus mehreren Literaturstellen ergab [Björnbo; von Braunmühl].

Hier nun sollen kurz die Lebensdaten von Johannes Werner sowie die zeitliche Abfolge vom Aufstellen der Prosthaphärese, über deren "Wiederentdeckung" sowie deren Publikation in groben Zügen dargestellt werden.

Johannes Werner wurde am 14. Februar 1468 in Nürnberg geboren und starb im Mai 1528 in Nürnberg als Pfarrer der Gemeinde St. Johannes. In seiner Freizeit betätigte er sich als Mathematiker, Astronom, Astrologe, Geograph und Kartograph.

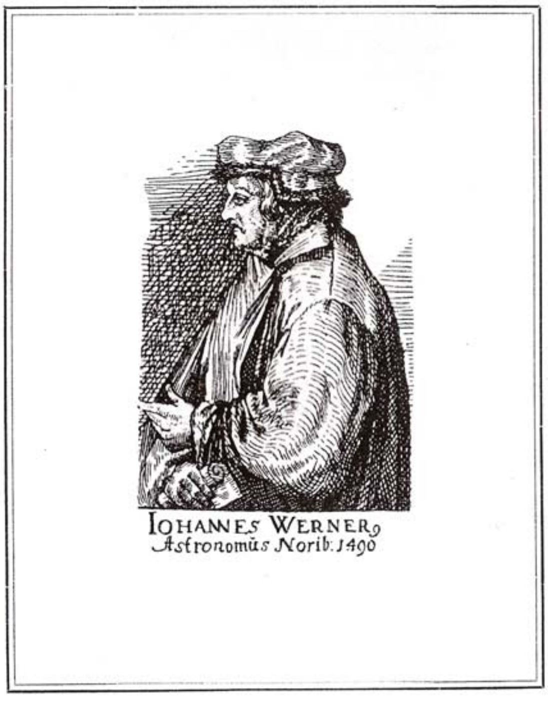


Abbildung 5-1 Johannes Werner

» *Werner studierte ab 1484 in Ingolstadt Theologie und Mathematik. 1490 wurde er Kaplan in Herzogenaurach. Von 1493 bis 1497 hielt er sich in Rom auf. 1503 wurde er zum Vikar an der Kirche in Nürnbergs Vorstadt Wöhrd berufen. Danach wurde er Pfarrer an der Johanniskirche in Nürnberg, eine Stelle, die er bis zu seinem Tod innehatte. Kaiser Maximilian I. ernannte ihn zum Kaiserlichen Kaplan. Die IAU ehrte ihn mit dem Mondkrater Werner.*

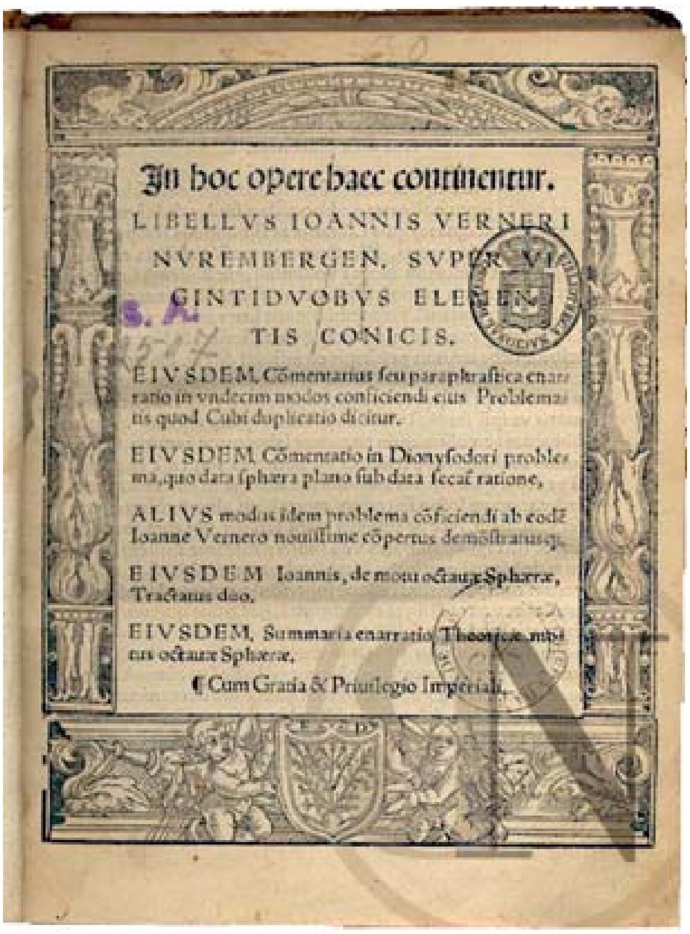
» *Werner war sehr an der Astrologie interessiert und stellte zahlreichen bekannten Nürnbergern das Horoskop, darunter Erasmus Topler (1462-1512), Propst bei St. Sebald, Willibald Pirckheimer (1470-1530), Christoph Scheurl II (1481-1542) und Sebald Schreyer (1446-1520). Werner erntete dafür aber auch harte Kritik. So schrieb der Bamberger Chorherr Lorenz Beheim (um 1457-1521) über ihn: "Er macht immer ein großes Wesen von seinen Geheimnissen, die ihm aber bislang noch wenig Ehre eingetragen haben. Das meiste erlügt er, wenn er Wahres vorhersagen will. "*

» *Werner war mit Johannes Stabius (nach 1460-1522) befreundet. In Zusammenarbeit mit ihm entstanden zahlreiche wichtige Werke. So regte Werner die Konstruktion einer Sonnenuhr an, die auch die "Nürnberger Stunden" anzeigen sollte, was im Wesentlichen bedeutet, dass die Uhr auch die seit Sonnenaufgang verflossenen Stunden anzeigen sollte. Stabius lieferte den Entwurf, den Sebastian Sperantius (?-1525) 1502 an den Ostchor der Lorenzkirche zeichnete. Stabius drängte Werner auch dazu, seine Manuskripte zu veröffentlichen. Im November 1514 verließ das Sammelwerk unter der Überwachung von Conrad Heinfogel (?-1517) die Druckpresse. U.a. wird darin eine bestimmte Form der Kartenprojektion vorgestellt, die als Stabius-Werner-Projektion in die Geschichte einging. 1522 erschien ein zweiter Sammelband (Abbildung 5-2), der seine Arbeit über die achte Sphäre enthielt. Aus geozentrischer Sicht beschäftigte er sich darin mit der Präzession der Sterne, wofür er von Copernicus scharf zurückgewiesen wurde.*

Diese und weitere Informationen, besonders auch zu Werners meteorologischen Aktivitäten, finden sich im Internet unter [Nürnberg und Wikipedia].

Ein erster Sammelband war 1514 unter dem Titel: " In hoc opere haec continentur: Nova translatio primi libri geograpiae Cl. Ptolemaei, quae quidem translatio verbum habet e verbo fideliter expressum Ioanne Vernero Nurembergensi interprete……" erschienen, der Arbeiten von ihm als auch von anderen Autoren enthielt.

Abbildung 5-2 Sammelband von 1522 [nach Mehl - aus der Bibliothek in Lissabon]


In hoc opere haec continentur.
LIBELLVS IOANNIS VERNERI NVREMBERGEN. SVPER VIGINTIDVOBVS ELEMENTIS CONICIS.
EIVSDEM, Cõmentarius seu paraphrastica enarratio in vndecim modos conficiendi eius Problematis quod Cubi duplicatio dicitur.
EIVSDEM, Cõmentatio in Dionysodori problema, quo data sphæra plano sub data secat ratione,
ALIVS modus idem problema cõficiendi ab eodẽ Ioanne Vernero nouissime cõpertus demõstratusq;
EIVSDEM Ioannis, de motu octauæ Sphæræ, Tractatus duo,
EIVSDEM, Summaria enarratio Theoricæ motus octauæ Sphæræ,
Cum Gratia & Priuilegio Imperiali.

» *Aus dem, was wir von Werners Leben wissen und aus seinen eigenen Publikation schließen können, geht also nur folgendes hervor: Vor dem Jahre 1513 und wahrscheinlich nach dem Jahrn 1505 verfaßte Werner fünf Bücher über sphärische Dreiecke mit dem Titel liber de triangulis sphaericis oder liber sphaeraliurn triangulorum. Sowohl im Jahre 1514 als 1522 lag dieses Werk in einer Redaktion vor, in der die Sätze IV, 2-5 des Cod. Regin. 1259 zum dritten Buch gehörten, während wenigstens im Jahre 1522 die Bücher I-II dem Anschein nach den uns durch die Handschrift bekannten Inhalt hatten. Werner war sehr eifrig, das Werk zum Druck zu befördern, namentlich weil er sich bewußt war, daß die schon im Jahre 1514 daselbst klar dargelegte prosthaphäretische Methode von großem praktischem Wert sei.«* [Björnbo, S. 157]

Björnbo zieht diese Schlussfolgerung aus der Vergleichbarkeit der Inhalte der Handschrift mit denen der Sammelbände. Einerseits ging es dabei um die erstaunliche Ähnlichkeit bzw. Gleichheit einer Dreiecksauflösung durch Orthogonalprojektion. Darin hatte Werner " folglich die prosthaphäretische Methode und ihre Anwendung zur praktischen Umgestaltung des Seiten-Cosinussatzes, d.h. des zweiten Hauptsatzes der sphärischen Trigonometrie* schon vollständig ins reine gebracht."

*

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

Weiterhin sagt er [Björnbo; Seite 155] :" Im Sammelband vom Jahre 1522 wird aber in Werners Buch de motu octavae sphaerae….. im Dreieck Stern - Pol der Ekliptik - Nordpol die Länge des Sternes (λ) durch seine Breite (β), seine Deklination (d) und die Ekliptikschiefe (ε), d.h. wie oben ein Winkel eines schiefwinkligen sphärischen Dreiecks durch dessen drei gegebene Seiten numerisch bestimmt…."

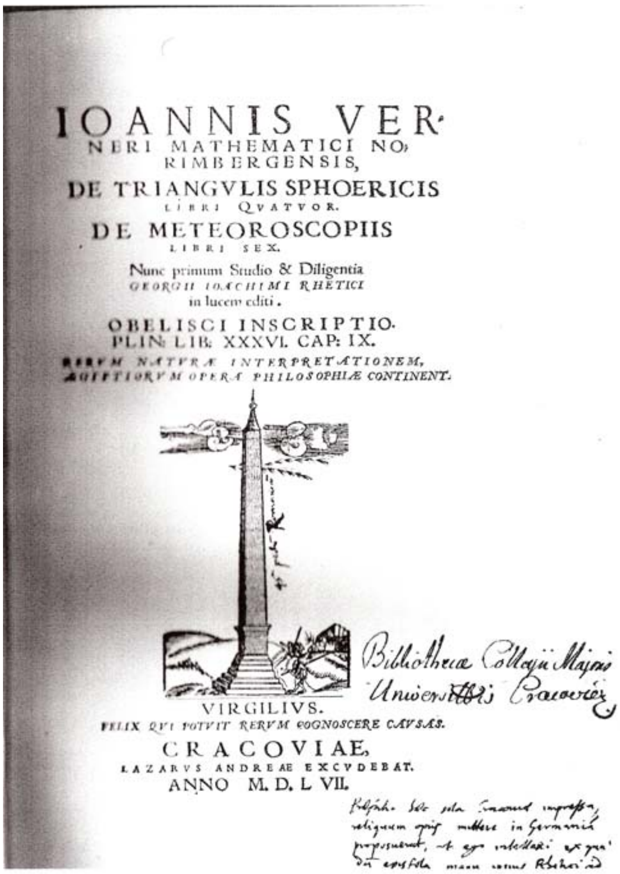
Dass die Entstehung der Prosthaphärese nach 1505 liegen muss, entnimmt Björnbo einem in der Handschrift vorliegenden Zitat der Euklid-Übersetzung des Zamberti (Bartholomäo Zamberto Veneto), die erst nach 1505 verfügbar war.

Nachdem klar war, dass die Handschrift Cod. Reg. 1259 ihren Ursprung in diesen beiden Werken von Johannes Werner hatte, ging es darum, Entstehen und Verbleib der Handschrift Cod. Reg. 1259 nach Werners Tod heraus zu finden.

Bis zum Tode von Werner im Jahre 1528 sind die beiden Werke nicht gedruckt worden. Zumindest sind keine entsprechenden Hinweise oder gar Exemplare aus jener Zeit gefunden worden. Die Inhalte der I. Joannis Verneri *Norimbergensis de triangulis sphaericis* in vier Büchern sowie II. Joannis Verneri *Norimbergensis de meteoroscopiis* in sechs Büchern waren aber den Zeitgenossen Werners bekannt. Dazu gehörten Johann Wilhelm von Loubemberg und dessen Freund Peter Apian. Der Bibliograph Konrad Gesner (1516-1576) beschreibt 1555, dass der Nürnberger Mathematiker und Mechaniker Georg Hartmann (1489-1564) die beiden Werke von Werner vor der Vernichtung rettete. Nach Doppelmayr hat Hartmann diese und andere Arbeiten aus dem Nachlass von Werner wahrscheinlich 1542 in Nürnberg ungeordnet dem Georg Joachim Rheticus (1514-1576; er lebte ab 1554 in Krakau als praktizierender Arzt) übergeben. G. Eneström [Eneström] fand heraus, dass eine von Rheticus herausgegebene Ausgabe beider

Werke des Johannes Werner im Jahre 1557 in Krakau erschienen ist. Allerdings enthält diese Ausgabe neben dem Titelblatt nur die zehnseitige Einleitung (Prooemium) von Rheticus und keinen Text von Werner. Das Titelblatt enthält wiederum klare Hinweise auf die Anzahl der Bücher der beiden Werke.

Abbildung 5-3 Titelblatt der Krakauer Ausgabe



IOANNIS VER-
NERI MATHEMATICI NO-
RIMBERGENSIS,
DE TRIANGVLIS SPHOERICIS
LIBRI QVATVOR.
DE METEOROSCOPIIS
LIBRI SEX.
Nunc primum Studio & Diligentia
GEORGII IOACHIMI RHETICI
in lucem editi.
OBELISCI INSCRIPTIO.
PLIN. LIB. XXXVI. CAP. IX.
RERVM NATVRÆ INTERPRETATIONEM,
AEGYPTIORVM OPERA PHILOSOPHIÆ CONTINENT.
VIRGILIVS.
FELIX QVI POTVIT RERVM COGNOSCERE CAVSAS.
CRACOVIAE,
LAZARVS ANDREAE EXCVDEBAT.
ANNO M. D. L VII.

Bibliotheca Collegii Majoris Universitatis Cracoviensis

Eine Erklärung zum Fehlen des Textes sieht Björnbo darin, dass Rheticus und nach dessen Tod sein Schüler Valentinus Otho (ca. 1550-1605) sowohl die Gliederung (eine systematische Aufstellung der verschiedenen Dreiecksformen) und als auch den Inhalt der De triangulis sphäricis in dem 1596 herausgegebenen großartigen Tafelwerk Opus Palatinum eingesetzt und die Grundideen Werners, dem sie Hochachtung und Respekt zollen, vervollkommnet haben. Allerdings hatte Rheticus sich zur Auflösung sphärischer Dreiecke nicht auf Ptolemaios oder Geber, deren Methode von Peuerbach, Regiomontan und Werner ausgebaut worden sei, gestützt. Sondern er entwickelte eine eigene, die von der Betrachtung von Pyramiden ausgehe, deren gemeinsame Spitze der Mittelpunkt der Kugel sei und lehnte sich damit an Kopernikus an [Björnbo, Seite 163 Fußnote 2]. Rheticus war der einzige Schüler des Kopernikus und hatte diesen zur Herausgabe des berühmten De revolutionibus orbium coelestium Libri VI angeregt und sich selbst das Erstellen einer zuverlässigen Sinustafel auf die Fahnen geschrieben.

So geht Björnbo davon aus, dass die im Vatikan liegende Handschrift Cod. Reg. 1259 sich im Besitze von Rheticus befand und eine Abschrift des Originals darstellte, die als Druckvorlage dienen sollte. Dieses Druckmanuskript - das keine Zeichnungen und Daten enthielt - ging nach dem Tode von Rheticus (1576) in die Händes seines Schülers Valentinus Otho über. Aus dessen Nachlass ging das Manuskript an den Heidelberger Professor Jakob Christmann (1554-1613 {bei Björnbo S. 165 fälschlicherweise 1630}), der 1611 in seinem Buch *theoria lunae* aus den beiden Werken von Werner zitierte und sogar angab, die beiden Bücher zu besitzen.

In seiner Disseration hat Erwin Christmann 1924 [Christmann] folgendes geschrieben:

» *Die "theoria lunae" spielt insofern in der Geschichte der Trigonometrie eine bemerkenswerte Rolle, als sie in einem Anhange Angaben über den Erfinder der prosthaphaeretischen Methode machte. Bis zur Auffindung der beiden Werner'schen Schriften, "de triangulis sphaericis" und "de meteoroscopiis" durch A. Björnbo in der vatikanischen Bibliothek (1902) zu Rom, war die "theoria lunae" eine der wenigen Quellen, um in dieser lange Zeit umstrittenen Frage Klarheit zu schaffen und für von Braunmühl ist noch 1899 in seinen "Vorlesungen zur Geschichte der Trigonometrie" die Christmann'sche Schrift die hervorragendste Stütze für seine Beweisführung von der Erfindung der prosthaphaeretischen Methode durch Joh. Werner. Christmann teilte hier mit, das Manuskript jenes Werkes sei ihm bekannt, - ohne dass in Erfahrung zu bringen ist, ob ihm das später verlorene Originalmanuskript oder das Druckmanuskript aus der vatikanischen Bibliothek zur Verfügung stand -. Werner habe darin die Prosthaphaeresis entwickelt und an Figuren erläutert. Er verteidigte diesen gegen Tycho Brahe, der mit seinem Schüler Wittich allgemein für die Erfinder gehalten wurden. Christmann spricht wohl von Transcriptoren, bleibt aber sonst auf dem Boden rein sachlicher Ausführung. Eine bewusste Irreführung stellt er nicht fest.*

» *Auch heute sind ja diese Zusammenhänge durchaus nicht so geklärt, wie es wünschenswert wäre. Man erkennt zwar Werner die Erfindung der Methode zu, d.h. eigentlich mehr die Wiederentdeckung der prosthaphaeretischen Formeln, denn sie waren ja schon den Arabern bekannt, und die Möglichkeit ihrer praktischen Verwendung, andererseits muss man aber so objektiv sein und dem verdienstvollen Mathematiker und Astronomen Kreis um den Landgrafen Wilhelm von Hessen, also vor allem Wittich und Tycho Brahe das ausschliessliche Verdienst der allgemeinen Einführung in die Rechnung zusprechen. Die Bedeutung ihrer Tätigkeit muss um so mehr anerkannt werden, als diesem schaffensfreudigen Saeculum die Erfinder der Logarithmen und ihrer Verwendung für die Praxis noch nicht zu gute kam. Ferner konnte nicht einmal eine Entnahme der Formeln durch Wittich und Tycho Brahe durch vergleichende Forschung nachgewiesen werden.*

» *Neben den genannten Angaben in der "theoria lunae" bringt Christmann eine volle Entwicklung der Methode und die wichtigsten Sätze aus der Dreieckslehre, soweit er sie benötigt. Diese hatte er schon vorher in seinem Werke "observationum solarium libri tres, in quibus explicatur versus motus Solis in sodiaca et universa doctrina triangulorum ad rationes apparentius coelestium accomodatur Basel 1601" zusammenfassen lassen. In einer anderen Arbeit betitelt "nodus Cordinis ex doctrina sinum explicatus 1612" lehrte er geometrische Aufgaben anstatt auf algebraische Weise mit Hilfe der Sinusse lösen.*

» *Wenn auch heute durch die Wiederauffindung der trigonometrischen Arbeiten des Werner die "theoria lunae" mit ihren Angaben in den Hintergrund getreten ist, so ist ihre Existens historisch bemerkenswert, besonders da ihre Behauptungen duch die neueren Untersuchungen als richtig anerkannt wurden und da sie zusammen mit den beiden Schriften aus den Jahren 1601 und 1612 von dem trigonometrischen Interesse des Heidelberger Professoren ein beredtes Zeugnis ablegt. «*

Anton von Braunmühl basiert seine Ausführungen zur Entwicklung der Prosthaphärese besonders auf den Aussagen von Jakob Christmann. Allerdings sieht er den Ursprung dieser Formel bereits bei Ibn Junos, einem arabischen Mathematiker (gest. 1009). Diese Ansicht ist auf Grund neuer Erkenntnisse von David A. King [King], die er während seiner Dissertation gewonnen hat, nicht zu halten.

Welche Rolle spielt Tycho Brahe (1546-1601), der dänische Astronom, im Zusammenhang mit der Prosthaphärese, die er seit 1580 einsetzt? Nach [von Braunmühl 1899] *"kannte Tycho Brahe die Stelle, an welcher Werner mit Hinweis auf seine Dreiecksbücher die prosthaphäretische Methode anwendet, um die Länge der Spica virginis zu finden, denn er spricht oft von Werner´s Schrift "De motu octavae sphaerae" und greift speziell dessen Beobachtung der Spica an. Doch konnte ihn der Wortlaut jener Stelle nur auf die Existenz eines praktischeren Rechnungsverfahrens, als das gewöhnliche ist, aufmerksam machen, das Verfahren selbst war absolut nicht daraus zu entnehmen."*

Möglich ist, dass Brahe die Handschrift von Johannes Werner direkt zu Gesicht bekommen hat. Allerdings ist sicher davon auszugehen, dass ihm deren Inhalte übermittelt wurden. [Björnbo, Seite 168 ff] Dazu kommen mehrere Wege in Frage, siehe auch [Thoren]:

1. Bei Besuchen Brahes in Wittenberg in den Jahren 1566 oder 1568-1569 oder 1575 mag Brahe die Dreiecksbücher von Johannes Werner eingesehen haben

2. Paul Wittich und Brahe haben 1580 eine eigene prosthaphäretische Methode entwickelt

3. Reimarus Ursus (Nicolai Reimers; 1551-1600) - soll 1584 bei einem Besuch auf Brahes Arbeitsinsel Hven die prosthaphäretische Formel gestohlen haben und galt als Intimfeind des Brahe. In seinem *Fundamentum Astronomicum* (Strassburg 1588) ist die prosthaphäretische Formel des Johannes Werner das erste Mal veröffentlicht worden.

4. Die Rolle des Jost Bürgi, zu dem Wittich in Kontakt war und von dem Bürgi in Kassel die Formel erhalten haben soll - nach [Thoren] und [Lutstorf] soll Bürgi dann die geometrischen Beweise erstellt haben

5. Johann Richter genannt Prätorius (1537-1616) hat das Buch über die Sphärik 1569 bei Rheticus gesehen (1599 berichtet er darüber) und war von 1571-1576 Professor der Mathematik in Wittenberg. Nach einem Brief von Brahe an Hayck, den Brahe 1588 verfasste, hatte er Prätorius 1575 nicht getroffen.

6. Die Rolle des Paul Wittich - ihm schreibt Brahe 1592 (5 Jahre nach Wittichs Tod) die Entdeckung der Prosthaphärese zu. Dies macht auch [Thoren], der zwischen der prosthaphäretischen Formel und der Prosthaphärese (Berechnungen mit der Formel) unterscheidet.

Möglicherweise war es auch ein Zusammenspiel der obigen Punkte, die dazu führten, dass Tycho Brahe die Prosthaphärese kennenlernte und mit Paul Wittich zusammen weiter entwickelte und zu nutzen wusste. Anton von Braunmühl [von Braunmühl; Teil 1, Seite 193] spricht deshalb auch von einer "Wiedererfindung" der Prosthaphärese durch Brahe im Jahre 1580. *Auch Kepler nennt die Prosthaphäresis einmal ein "artificium Tychonicum", dann wieder "negotium Wittichianum" und wieder "regula Wittichiana"* [von Braunmühl 1899].

Der Weg der Handschrift und der Formeln ist im Anhang grafisch zusammengefasst.

An dieser Stelle soll kurz auf die Bedeutung des Regiomontan (Johannes Müller, geb. 1436 in Königsberg bei Haßfurt - gest. 1476 in Rom) für die Arbeiten des Johannes Werner eingegangen werden. Björnbo [Björnbo, Seite 172ff] führt dazu aus, dass Werner erst spät - nämlich 1504 - Zugang zu den Werken von Regiomontan, u.a. den 5 "unvollendeten und verstümmelten " Dreiecksbüchern, bekam. Darüber war Werner nicht glücklich gewesen und hat vielleicht aus diesem Grunde in seinen Arbeiten keinen direkten Bezug zu Regiomontan hergestellt und sie nicht zitiert. Vielleicht aber auch, weil er mit all den von Regiomontan verwandten Werken des Euklid, Menelaos, Gebers, Ptolemaios und v. Peurbachs selbst bestens vertraut war und er keine Wiederholung der Arbeit des Regiomontan erstellen wollte. Allerdings sind Ähnlichkeiten zu den Gedanken und einigen Ausdrücken aus Regiomontans Arbeiten in denen von Werner zu erkennen.

Im Zusammenhang mit der Geschichte der Prosthaphärese werden immer wieder Namen von sehr bekannten und weniger bekannten Gelehrten genannt, auf die hier nicht weiter eingegangen werden kann, die aber nicht unerwähnt bleiben sollen. Deren Rolle und Arbeiten im Zusammenhang mit der Prosthaphärese sind wahrscheinlich eine eigene Untersuchung wert:

An erster Stelle Jost Bürgi (1552 - 1632)

» Peter Apian (1495 - 1552)

» Erasmus Reinhold (1511 - 1553)

» Bartholomäus Scultetus /Schulz (1532 - 1614)

» Christoph Clavius (1537 - 1602); *(1538 - 1612, wird auch als Erfinder der Prosthaphärese genannt* [Symposium 2005]) - ist es aber nicht.

» Nicolaus Reimers /Reimarus Ursus (1551 - 1600)

» Paul Wittich (1555 - 1587)

» Melchior Jöstel (1559 - 1611) und *sein in der Wiener Hofbibliothek vorliegendes handschriftliches Traktat "Logistica Prosthaphaeresis Astronomica"* [von Braunmühl 1899]

» Christian Severin Longomontan (1562 - 1647)

und evtl. Ibn Junos (um 1000)

Die Namen sind chronologisch nach Geburtsjahr geordnet.

Zahlreiche Einstiegsinformationen und Hinweise dazu sind bei [von Braunühl 1900], [Lutstorf] und [Thoren] sowie bei [Gingerich 1988 und Gingerich 2005] zu finden.

6 Mathematisches

Zur Erinnerung, bei der Prosthaphärese handelt es sich um eine Methode, mit der durch den Einsatz trigonometrischer Formeln eine Multiplikation in eine Addition oder Subtraktion überführt werden kann. Diese Technik stellte für die Astronomen der damaligen Zeit eine erhebliche Arbeitserleichterung dar.

Bei einem Blick in eine Formelsammlung oder ins Internet [Mathworld 11 und 12] stellt sich heraus, dass es viele trigonometrische Ausdrücke der Prosthaphärese gibt. Die Formeln, die wir als prosthaphäretische kennen, werden im Englischen mit "Werner Formulas" bezeichnet (Abb 6-1).

Abbildung 6-1 Werner Formulas

Geometry > Trigonometry > Trigonometric Identities

Werner Formulas

The Werner formulas are the trigonometric product formulas

$$2 \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) \quad (1)$$
$$2 \cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \quad (2)$$
$$2 \cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \quad (3)$$
$$2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta). \quad (4)$$

This form of trigonometric functions can be obtained in *Mathematica* using the command `TrigReduce`[*expr*].

SEE ALSO: Prosthaphaeresis Formulas. [Pages Linking Here]

LAST MODIFIED: February 17, 2006

CITE THIS AS:

Weisstein, Eric W. "Werner Formulas." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/WernerFormulas.html

Der Link auf dieser Seite führt zu den Prosthaphaeresis Formulas wie sie in Abb 6-2 dargestellt und im Englischen als Simpson's Formulas bekannt sind. Allerdings unterscheiden sich diese Formeln in der Darstellungsweise und in der Einfachheit der Anwendung.

Abbildung 6-2 Prosthaphaeresis Formulas aus mathworld

Geometry > Trigonometry > Trigonometric Identities

Prosthaphaeresis Formulas

The Prosthaphaeresis formulas, also known as Simpson's formulas, are trigonometry formulas that convert a product of functions into a sum or difference. They are given by

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \quad (1)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \quad (2)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right] \quad (3)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\sin\left[\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]. \quad (4)$$

This form of trigonometric functions can be obtained in *Mathematica* using the command `TrigFactor`[*expr*].

Im deutschen Sprachgebrauch [von Braunmühl 1900] werden die in Abb 3-1 dargestellten Formeln als die prosthaphäretischen Formeln bezeichnet.

In moderneren Formelsammlungen tauchen diese Bezeichnungen nicht mehr auf, sondern die Formeln sind als "Produkte trigonometrischer Funktionen" zugeordnet [Bartsch] - siehe Abbildung 6-3.

Abbildung 6-3 Die Prosthaphäretischen Formeln als "Produkte trigonometrischer Funktionen"

Products of trigonometric functions

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

Dadurch gehören einige weitere Ausdrücke zu dieser Kategorie, die in Abbildung 6-4 dargestellt sind [Bartsch].

Abbildung 6-4 Weitere Produkte trigonometrischer Funktionen (prosthaphäretisch ausgedrückt)

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha) + \cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha) + \sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

Die von Johannes Werner und Tycho Brahe bzw. Paul Wittich verwendeten Formeln unterscheiden sich und weisen daher auch auf eine unterschiedliche, u.U. unabhängige Entstehungsgeschichte hin. Während Werner mit dem eleganteren Sinus Versus arbeitet (siehe Formel 1), setzt Brahe nur den Sinus ein (siehe Formel 2) - [Björnbo, Seite 169].

Formel 1:

$$\frac{\dfrac{\sin(90°-a+c)-\sin(90°-a-c)}{2}}{\sin(90°-b)-\sin(90°-a-c)} = \frac{r}{\sin vers(180°-B)}$$

Formel 2:

$$\frac{\dfrac{\sin(90°-a+c)-\sin(90°-a-c)}{2}}{\sin(90°-b)-\dfrac{\sin(90°-a+c)-\sin(90°-a-c)}{2}} = \frac{r}{\sin(90°-B)}$$

Durch Umformulieren [Björnbo; Seite 166] gelangt Werner schliesslich zu der Formel 3 (für a+c < 90°) und der Formel 4 (für a+c >90°). Er verwendete dazu die Sinus-Form, da er keine Cosinus Funktionen benutzte.

Formel 3:

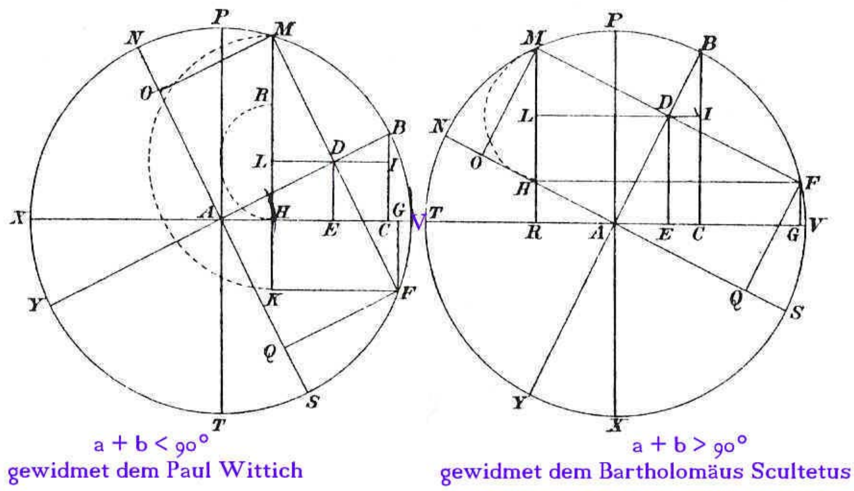
$$\sin a \bullet \sin c = \frac{1}{2}\{\sin((90°-a)+c)-\sin((90°-c)-a)\}$$

Formel 4:

$$\sin a \bullet \sin c = \frac{1}{2}\{\sin((90°-a)+c)+\sin(a-(90°-c)\}$$

Für den geometrischen Beweis der prosthaphäretischen Formeln greifen wir auf die Ausführungen von Anton von Braunmühl zurück [von Braunmühl 1900, Seite 195].

Abbildung 6-5 Aus Nikolaus Raymarus Ursus "Fundamentum astronomicum" 1588



Die Widmungen hat Ursus formuliert.

In beiden Figuren sei arc BV = a und arc SF = arc MN = B. FDM steht senkrecht auf AB. BC, DE, FG und MH sind als Lot auf AV gefällt. Links gilt HK=FG=MR, rechts ist HR=FG, in beiden Fällen wird mit MO und mit FQ das Lot auf NS, das parallel zu MF verläuft, gefällt.

Mit DLJ parallel zu AV wird in der linken Figur arc VM = 90° - b + a und arc VF = 90° - b - a;

MH = sin (90° - b + a); FG=HK=MR=sin (90° - b - a).

Mit LH = DE = ½ RH = ½ (MH - MR) = ½ {sin (90° - b - a) - sin (90° - b - a)}.

Ferner ist BC = sin a und AD = FQ = sin b und mit AB : AD = BC : DE

und mit AB = Sinustotus (Sintot)

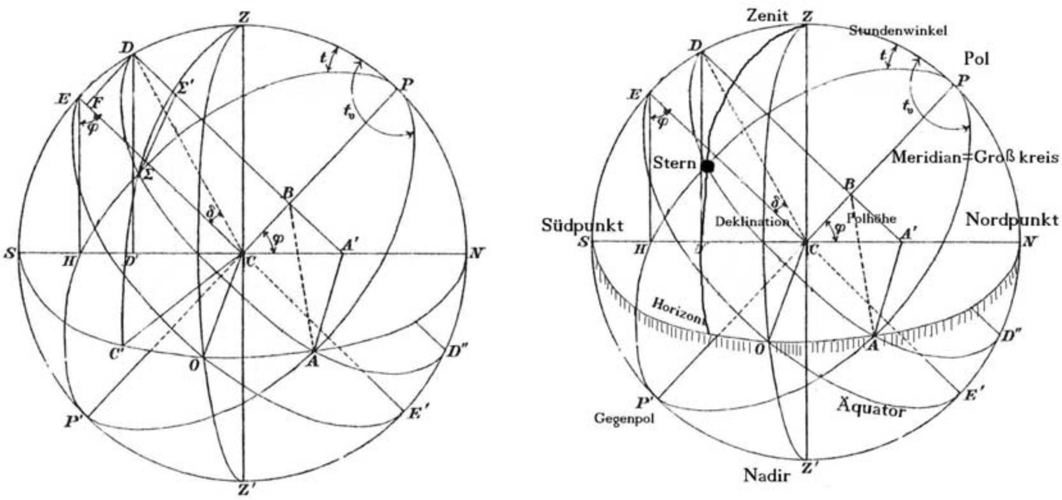
Sintot : sin b = sin a : ½ {sin (90° - b - a) - sin (90° - b - a)}

und aus der zweiten Figur folgt analog

Sintot : cos b = cos a : ½ {sin (b + 90° - a) - sin (b - 90° + a)}

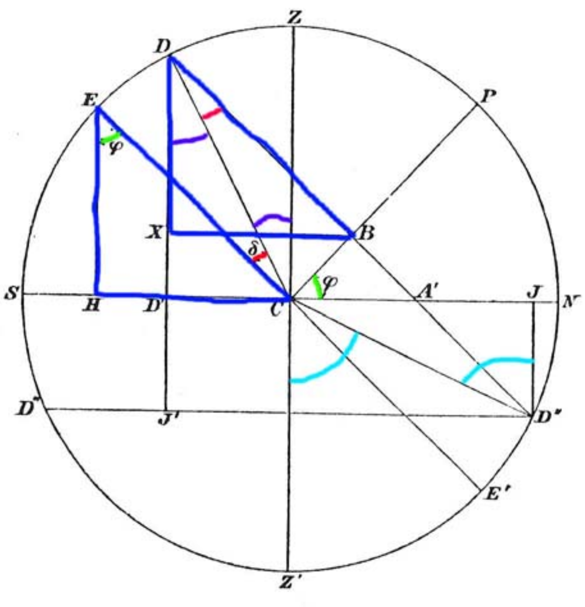
Im Folgenden stellen wir einen anderen geometrischen Beweisanatz aus den Arbeiten von Anton von Braunmühl [von Braunmühl 1897, Seite 26 und von Braunmühl 1900, Seite 39, 63] dar.

Abbildung 6-6 Schematisch dargestellte Kugel mit den Achsen der Horizontal- und Äquatorialkoordinaten (ZZ' und PP') - rechts vereinfacht und mit Legende



In dieser Abbildung 6-6 erkennnen wir zwei Winkel, die in der Astronomie eine wichtige Rolle spielen: ∢DCE = δ = Deklination = Abweichung und ∢PCN = φ = Polhöhe. An Hand dieser beiden Winkel lässt sich die prosthaphäretische Formel herleiten, wenn man die Kugeldarstellung auf den Meridian SZN orthogonal projiziert, eine Methode, der sich schon die Araber bei ihren astronomischen Untersuchungen bedient haben, siehe Abbildung 6-7.

Abbildung 6-7 Die Projektion der Abbildung 3-6 auf den Meridian



Zum Beweis der Prosthaphärese :

Nach Abbildung 1-7 ist $\sphericalangle DCZ = \varphi - \delta$, also $DD' = \cos(\varphi - \delta)$ und $\sphericalangle D''CZ' = \varphi + \delta$, also $D'I = \cos(\varphi + \delta)$. Zieht man noch D''D''' parallel zu NS, welche die Verlängerung von DD' in I' schneidet, so ist $DI' = \cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)$ und wenn BX parallel zu NS gezogen wird, so ist $DX = ½ [(\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)]$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DBX und ECH folgt

$$\frac{BD}{DX} = \frac{EC}{EH}$$

oder im Einheitskreis mit $EC = 1$ ergibt sich $EH \bullet BD = DX$.

Mit $BD = \cos\delta$ und $EH = \cos\varphi$ geht diese Gleichung unmittelbar über in Formel 5 :

Formel 5: $$\mathbf{\cos\varphi \bullet \cos\delta = ½ [(\cos(\varphi - \delta) + \cos(\varphi + \delta)]}$$

Simpson [Simpson, Seite 120] hat einen trigonometrischen Weg dargestellt, um die 4 prosthaphäretischen Formeln ineinander überzuführen. Zum Beispiel:

Darstellen von {sin X • sin Y} als Summe:

Mit $\varphi = 90° - X$ und $\delta = 90° - Y$ ergibt sich aus Formel 5

$$\cos(90° - X) \bullet \cos(90° - Y) = ½ [(\cos(90° - X - (90° - Y)) + \cos(90° - X + 90° - Y)]$$

$$\sin X \bullet \sin Y = ½ [(\cos(-X + Y) + \cos(180° - X - Y)]$$

$$\sin X \bullet \sin Y = ½ [(\cos(-(X - Y)) + \cos(180° - (X + Y))]$$

mit $\cos(-Z) = \cos Z$ und $\cos(180° - Z) = -\cos Z$ folgt

Formel 6: $$\mathbf{\sin X \bullet \sin Y = ½ [(\cos(X - Y) - \cos(X + Y)]}$$

Ein anderer Weg führt über die Anwendung der Additionstheoreme [Enzykl] :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\underline{+ \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a}$$

$$= [\sin(a + b) + \sin(a - b)] = 2 \sin a \cos b \qquad \text{oder}$$

Formel 7: $\mathbf{\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)] = A \cdot B}$

Bei diesen recht gut nachvollziehbaren Umwandlungen der einzelnen Formeln, ist kaum davon auszugehen, dass Johannes Werner diese Wege nicht kannte. Insofern kann die Unterscheidung zwischen der Entdeckung der prosthaphäretischen Formeln und der Anwendung der Rechenmethode der Prosthaphärese - wie sie [Thoren] vornimmt - als spekulativ und überflüssig bezeichnet werden. Siehe auch [Björnbo, Seite 157].

7 Anwendungen

Als erste Anwendung soll der Weg einer Multiplikation mit Hilfe der Formel 7

$$\mathbf{A \cdot B = \sin a \cdot \cos b = \tfrac{1}{2}\,[\sin (a + b) + \sin (a - b)]}$$

dargestellt werden, mit den Faktoren A = 0,61566 und B = 0,93969 [Enzykl, Seite 70]. Aus der Tafel in Abbildung 7-1 lesen wir für den Faktor A einen Winkel von a = 38° in der Sinusspalte (grün) ab, für B folgt aus der Cosinusspalte (rot) ein Winkel von b = 20° (siehe rote elliptische Umrandungen).

Abbildung 7-1 4-stellige Tafel aus [Enzykl, Seite 805]

Va. NATÜRLICHE WERTE FÜR SINUS, TANGENS, KOSINUS, KOTANGENS

Grad	sin	tan	
0	0,0000	0,0000	90
1	0175	0175	89
2	0349	0349	88
3	0523	0524	87
4	0698	0699	86
5	0872	0875	85
6	1045	1051	84
7	1219	1228	83
8	1392	1405	82
9	1564	1584	81
10	0,1736	0,1763	80
11	1908	1944	79
12	2079	2126	78
13	2250	2309	77
14	2419	2493	76
15	2588	2679	75
16	2756	2867	74
[illegible]	[illegible]	3057	73
18	3090	3249	72
19	3256	3443	71
20	0,3420	0,3640	70
21	3584	3839	69
22	3746	4040	68
23	3907	4245	67
24	4067	4452	66
25	4226	4663	65
26	4384	4877	64
27	4540	5095	63
28	4695	5317	62
29	4848	5543	61
30	0,5000	0,5774	60
31	5150	6009	59
32	5299	6249	58
33	5446	6494	57
34	5592	6745	56
35	5736	7002	55
[illegible]	[illegible]	7265	54
37	6018	7536	53
38	6157	7813	52
39	6293	8098	51
40	0,6428	0,8391	50
41	6561	8693	49
42	6691	9004	48
43	6820	9325	47
44	6947	9657	46
45	7071	1,0000	45
	cos	cot	Grad

Grad	sin	tan	
45	0,7071	1,000	45
46	7193	036	44
47	7314	072	43
48	7431	111	42
49	7547	150	41
50	0,7660	1,192	40
51	7771	235	39
52	7880	280	38
53	7986	327	37
54	8090	376	36
55	8192	428	35
56	8290	483	34
[illegible]	[illegible]	540	33
58	8480	600	32
59	8572	664	31
60	0,8660	1,732	30
61	8746	804	29
62	8829	881	28
63	8910	963	27
64	8988	2,050	26
65	9063	145	25
66	9135	246	24
67	9205	356	23
68	9272	475	22
69	[illegible]	605	[illegible]
70	0,9397	2,747	20
71	[illegible]	[illegible]	19
72	9511	3,078	18
73	9563	271	17
74	9613	487	16
75	9659	732	15
76	9703	4,011	14
77	9744	331	13
78	9781	705	12
79	9816	5,145	11
80	0,9848	5,671	10
81	9877	6,314	9
82	9903	7,115	8
83	9925	8,144	7
84	9945	9,514	6
85	9962	11,43	5
86	9976	14,30	4
87	9986	19,08	3
88	9994	28,64	2
89	9998	57,29	1
90	1,0000	∞	0
	cos	cot	Grad

Das heißt, für die beiden Glieder in der Klammer ergeben sich für a + b = 58° und für a - b = 18°.

Mit sin 58° = 0,8480 und sin 18° = 0,3090 (blauer Kasten) ergibt sich für die Summe 1,1570. Die Hälfte bringt 0,5785, was dem Produkt von 0,61566 • 0,93969 auf 4 Stellen entspricht (genau: 0,578529545). Der Fehler zwischen 0,578500000 und 0,578529545 liegt absolut bei 0,000029545, was einem relativen Fehler von 0,0051% entspricht. Es ist leicht zu erkennen, dass sich durch die Verwendung einer mehrstelligen Sinustafel eine höhere Genauigkeit erreichen lässt.

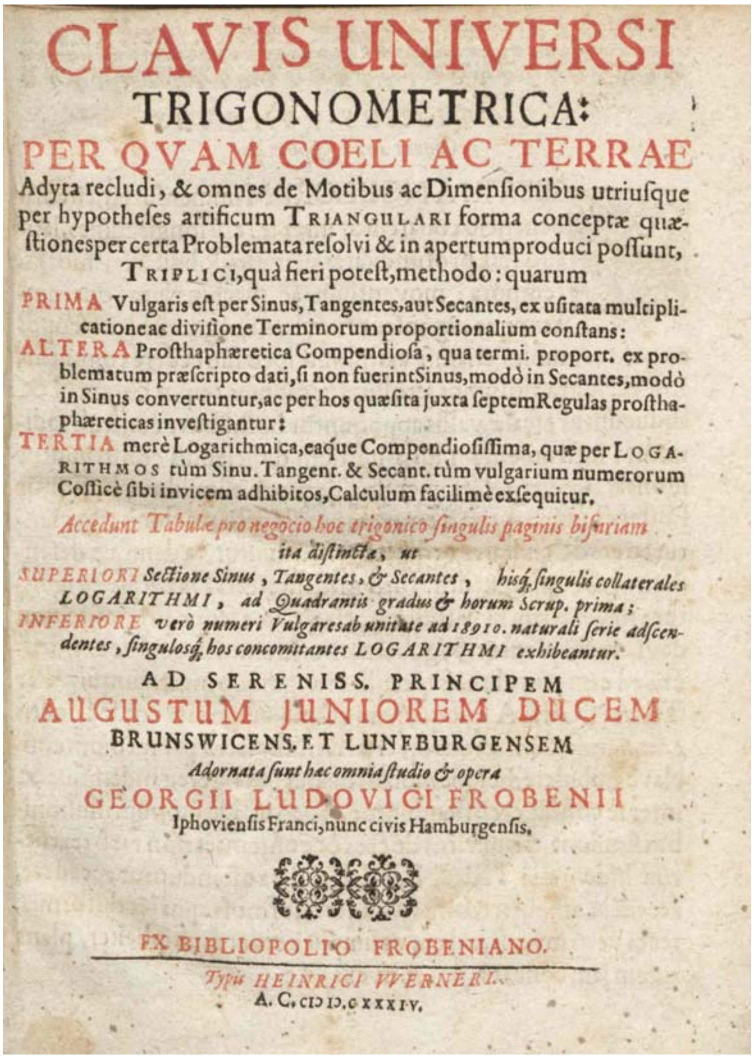
Mit den siebenstelligen Werten des Regiomontan aus seiner Sinustafel von 1541 ergibt sich mit sin 18° = 0,3090170 und mit sin 58° = 0,8480481 eine Summe von 1,1570651 und einer Hälfte von 0,578532550 ein dem genauen Ergebnis näherer Wert - absoluter Fehler = 0,000003005.

Auch die Division ist auf diesem Weg möglich. Man ersetzt dazu cos b durch 1/sec b und erhält dadurch für b einen anderen Winkel, so dass man mit der rechten Seite der Formel 7 weiterrechnen kann. Ein Beispiel dazu findet sich in [Sher].

Wie sich der Kenner denken kann, ist auch der umgekehrte Weg möglich, d.h eine Addition durch eine Multiplikation zu berechnen. Diese Methode ist zwar sehr, sehr umständlich, aber für den Rechenschieberbenutzer von theoretischem Interesse.

Georg Ludwig FROBENIUS (25.8.1566 in Iphofen - 21.7.1645 in Hamburg) war ein Polyhistor (Universalgelehrter), Mathematiker, Buchhändler und Hamburger Verleger. Er lebte in einer Zeit des Übergangs der Rechenmethoden, die in der Astronomie Anwendung fanden. Diesem Umstand trug er in seinem Werk ***Clavis Universi Trigonometrica*** [Frobenius] dadurch Rechnung, dass er alle darin angeführten Rechenbeispiele mit den damals bekannten Rechenmethoden darstellte.

Abbildung 7-2 2. Titelseite Frobenius



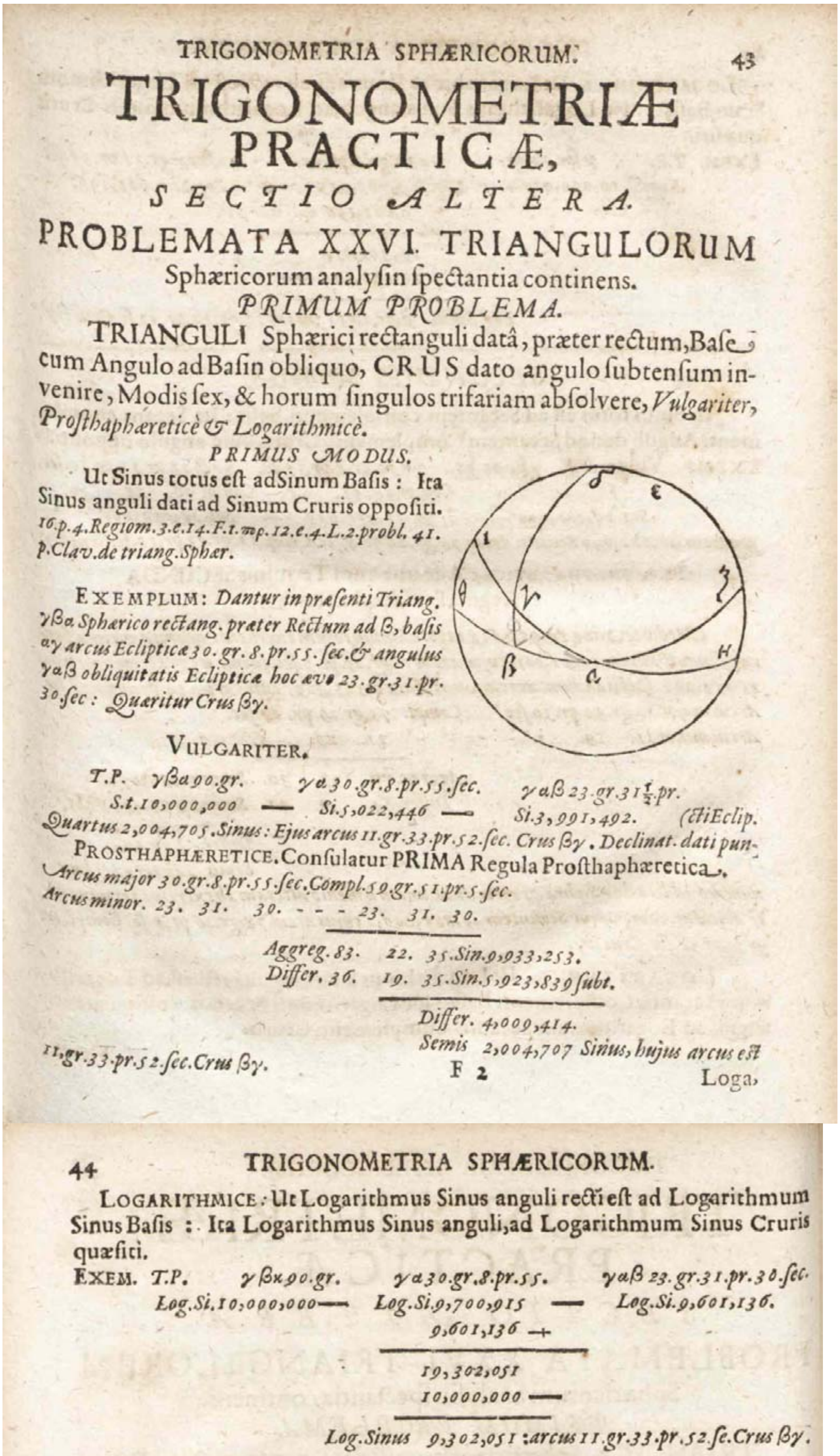
CLAVIS UNIVERSI
TRIGONOMETRICA:
PER QVAM COELI AC TERRAE
Adyta recludi, & omnes de Motibus ac Dimensionibus utriusque per hypotheses artificum TRIANGULARI forma conceptæ quæstiones per certa Problemata resolvi & in apertum produci possunt,
TRIPLICI, quà fieri potest, methodo: quarum
PRIMA Vulgaris est per Sinus, Tangentes, aut Secantes, ex usitata multiplicatione ac divisione Terminorum proportionalium constans:
ALTERA Prosthaphæretica Compendiosa, qua termi. proport. ex problematum præscripto dati, si non fuerint Sinus, modò in Secantes, modò in Sinus convertuntur, ac per hos quæsita juxta septem Regulas prosthaphæreticas investigantur:
TERTIA merè Logarithmica, eaque Compendiosissima, quæ per LOGARITHMOS tùm Sinu. Tangent. & Secant. tùm vulgarium numerorum Cossicè sibi invicem adhibitos, Calculum facilimè exsequitur.
Accedunt Tabulæ pro negocio hoc trigonico singulis paginis bifariam ita distinctæ, ut
SUPERIORI Sectione Sinus, Tangentes, & Secantes, hisq; singulis collaterales LOGARITHMI, ad Quadrantis gradus & horum Scrup. prima;
INFERIORE verò numeri Vulgares ab unitate ad 18910. naturali serie adscendentes, singulosq; hos concomitantes LOGARITHMI exhibeantur.
AD SERENISS. PRINCIPEM
AUGUSTUM JUNIOREM DUCEM
BRUNSWICENS. ET LUNEBURGENSEM
Adornata sunt hæc omnia studio & opera
GEORGII LUDOVICI FROBENII
Iphoviensis Franci, nunc civis Hamburgensis.

EX BIBLIOPOLIO FROBENIANO.
Typis HEINRICI WERNERI.
A. C. CIϽ IϽ.C XXXIV.

Frobenius hat drei Methoden angewendet, die er mit "Prima" bzw. "Vulgaris" und "Altera" bzw. "Prosthaphäretice" sowie "Tertia" bzw. "Logarithmice" bezeichnete.

Im Folgenden sind zu den einzelnen Methoden Musterbeispiele dargestellt und erläutert. Dabei ging es um die Berechnung einer Höhe, die sich aus dem Schnitt zweier Ebenen (Großkreise einer Kugel) ergibt. Die beiden Ebenen sind der Astronomie (Sphärische Trigonometrie) entlehnt und stellen die Äquatorial- sowie die ekliptische Ebene der Erdkugel dar.

Abbildung 7-3 Beispielseiten aus Frobenius zur Berechnung einer Seite in einem sphärischen Dreieck



TRIGONOMETRIA SPHÆRICORUM. 43

TRIGONOMETRIÆ
PRACTICÆ,
SECTIO ALTERA.
PROBLEMATA XXVI. TRIANGULORUM
Sphæricorum analysin spectantia continens.
PRIMUM PROBLEMA.

TRIANGULI Sphærici rectanguli datâ, præter rectum, Basi cum Angulo ad Basin obliquo, CRUS dato angulo subtensum invenire, Modis sex, & horum singulos trifariam absolvere, *Vulgariter, Prosthaphæreticè & Logarithmicè.*

PRIMUS MODUS.

Ut Sinus totus est ad Sinum Basis : Ita Sinus anguli dati ad Sinum Cruris oppositi. *16.p.4.Regiom.3.e.14.F.1.mp.12.e.4.L.2.probl. 41. p.Clav.de triang.Sphær.*

EXEMPLUM: *Dantur in præsenti Triang. γβα Sphærico rectang. præter Rectum ad β, basis αγ arcus Eclipticæ 30. gr. 8. pr. 55. sec. & angulus γαβ obliquitatis Eclipticæ hoc ævo 23. gr. 31. pr. 30. sec : Quæritur Crus βγ.*

VULGARITER.

T.P. γβα 90. gr. γα 30. gr. 8. pr. 55. sec. γαβ 23. gr. 31½. pr.
S.t. 10,000,000 — Si. 5,022,446 — Si. 3,991,492. (εtiEclip.
Quartus 2,004,705. Sinus : Ejus arcus 11. gr. 33. pr. 52. sec. Crus βγ. Declinat. dati pun-

PROSTHAPHÆRETICE. Consulatur PRIMA Regula Prosthaphæretica.
Arcus major 30. gr. 8. pr. 55. sec. Compl. 59. gr. 51. pr. 5. sec.
Arcus minor. 23. 31. 30. - - - 23. 31. 30.

Aggreg. 83. 22. 35. Sin. 9,933,253.
Differ. 36. 19. 35. Sin. 5,923,839 subt.

Differ. 4,009,414.
Semis 2,004,707 Sinus, hujus arcus est
11. gr. 33. pr. 52. sec. Crus βγ.

F 2 Loga,

44 TRIGONOMETRIA SPHÆRICORUM.

LOGARITHMICE : Ut Logarithmus Sinus anguli recti est ad Logarithmum Sinus Basis : Ita Logarithmus Sinus anguli, ad Logarithmum Sinus Cruris quæsiti.

EXEM. *T.P. γβα 90. gr. γα 30. gr. 8. pr. 55. γαβ 23. gr. 31. pr. 30. sec.*
Log. Si. 10,000,000 — Log. Si. 9,700,915 — Log. Si. 9,601,136.
9,601,136 +
19,302,051
10,000,000 —
Log. Sinus 9,302,051 : arcus 11. gr. 33. pr. 52. se. Crus βγ.

Berechnet werden soll in dem sphärischen Dreieck $\alpha\beta\gamma$ die einem Winkel gegenüberliegende Seite (das Stück) $\beta\gamma$ = a. Gegeben sind zwei Winkel und eine dem anderen Winkel (β) gegenüberliegende Seite. Die Besonderheit (und Vereinfachung) ist, dass es sich um ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck handelt. Der rechte Winkel (90°) liegt bei β. Zur Berechnung der Seite $\beta\gamma$ findet der Sinussatz Anwendung, der sich bei einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ausdrückt zu:

Sinussatz: $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin \gamma\alpha / \sin \beta$

Der Winkel α hat einen Wert von 23 Grad 31 Minuten und 30 Sekunden - und entspricht damit dem Wert der Ekliptic. Die Seite $\gamma\alpha$ wird mit einem Wert von 30 Grad 8 Minuten und 55 Sekunden angegeben. Dadurch, dass sinus 90° = 1 ist, ergibt sich eine Vereinfachung der Formel zu:

$$\sin a = \sin \alpha \cdot \sin \gamma\alpha$$

Nach der ersten "Vulgariter"-Methode ergibt sich der in Tabelle 7-1 dargestellte Rechenweg:

Tabelle 7-1 Der Rechenweg mit Multiplikation der Sinusse

1. Vulgariter	**Winkel/Seite**	**Trig Funkt**	**Grad**	**Pr**	**Sec**	
	α		23	31	30	
	$\gamma\alpha$ = b		30	8	55	
	β		90			
	Si α **(Interpoliert)**	3.991.492				
		mal				
	Si $\gamma\alpha$	5.022.446				
		geteilt durch				
	S.t. (sinus totus = β)	10.000.000				
		ist gleich				
	Quartus: si α • si $\gamma\alpha$	2.004.705				
Lösung:	Sinus: arcus ejus		**11**	**33**	**52**	Crus $\beta\gamma$

Nach dieser Methode wurden also die siebenstelligen Sinusse der Winkel bestimmt und miteinander **multipliziert**.

Als Lösung ergibt sich für die Seite $\beta\ \gamma =$ a: 11 Grad 33 Minuten 52 Sekunden.

Die 2. Methode ist die "Prosthaphäretische", die nach folgender Formel arbeitet:

$$\sin \gamma a \bullet \sin \alpha = \frac{1}{2}\{\sin((90° - \gamma a) + \alpha) - \sin((90° - \alpha) - \gamma a)\}$$

Tabelle 7-2 Rechenweg der Prosthaphärese

2. Prosthaphäretice		**Grad**	**Pr**	**Sec**		**Grad**	**Pr**	**Sec**		**Sinus**	**Arcus**		
γα	Arcus Major	30	8	55	Compl γα	59	51	5			**Grad**	**Pr**	**Sec**
α	Arcus Minor	23	31	30	α	23	31	30					
				plus	Aggreg.	83	22	35		9,933,253			
									minus				
				minus	Differ.	36	19	35		5,923,843			
									Differ.	4,009,410			
									geteilt durch 2				
Lösung:					Crus βγ				Semis	2,004,705	**11**	**33**	**52**

In Tabelle 7-2 ist der Rechenweg aufgezeigt, mit dem die prosthaphäretische Formel ausgerechnet wurde. Zur Erinnerung: das zu berechnende Produkt (sin γα mal sin α) wird durch **Addition und Subtraktion** der Sinusse berechnet. Lediglich am Schluss kommt eine einfache Division (Semis) durch 2 hinzu. Zwar erkennen wir hier einen etwas aufwändigeren Rechenweg als bei der Vulgariter-Methode, allerdings werden einfachere Rechenarten angewendet.

Den einfachsten und schnellsten Weg zur Berechnung der Höhe stellt der in Tabelle 7-3 wiedergegebene logarithmische Weg dar. Dazu war es erforderlich, die zu den Sinussen gehörigen Logarithmen herauszusuchen und diese **zu addieren bzw. zu subtrahieren**. Der Umgang mit

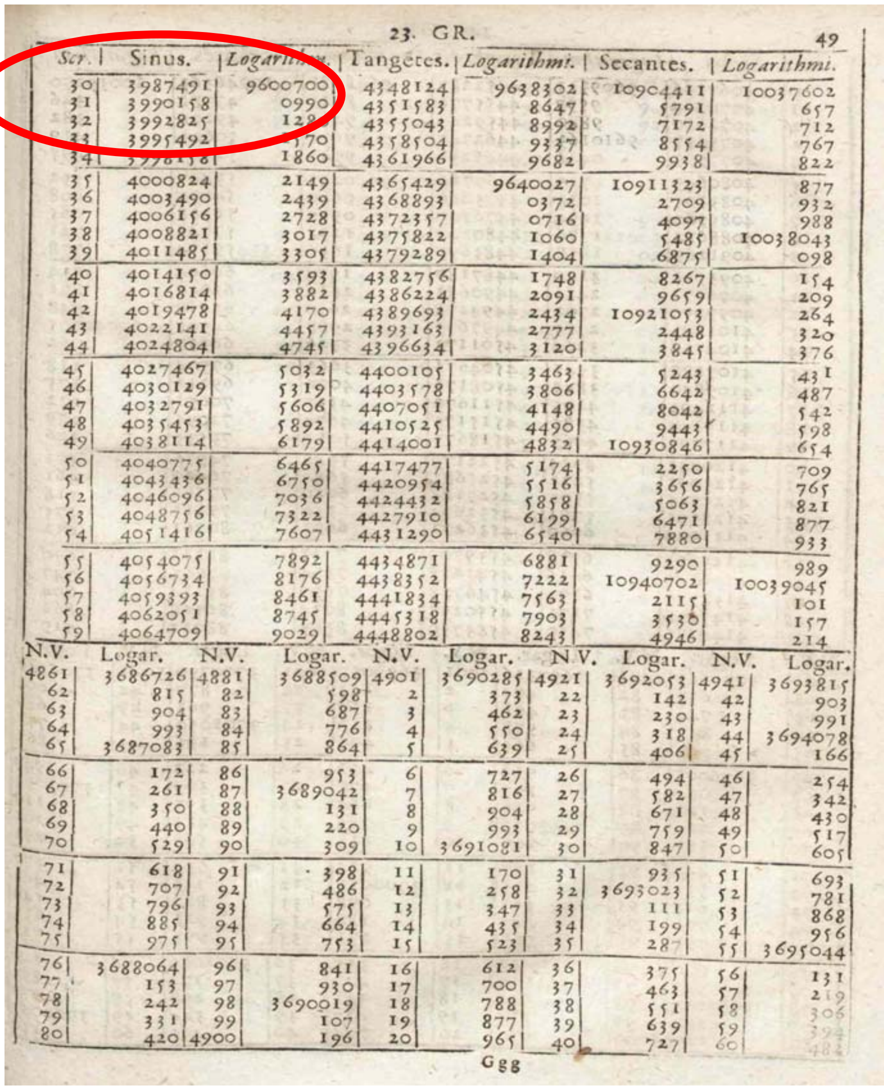
Tabellenwerken war den Astronomen der damaligen Zeit vertraut, denn es existierten bereits entsprechende Tafelwerke für die trigonometrischen Funktionen als auch für deren Logarithmen. Frobenius hat seiner umfassenden *Clavis Universi Trigonometrica* (323 Seiten Lehrbuch plus 184 Seiten Tabellen) ein ausführliches Tabellenwerk beigefügt, siehe Abbildung 7-4, in dem sowohl die Sinusse sowie die Tangens und Secans-Werte als auch deren Logarithmen auf die Grad-Minute genau erfasst sind. Außerdem sind auch die dekadischen Logarithmen der Zahlen tabelliert.

Tabelle 7-3 Der Logarithmische Weg

3. Logarithmice										
Winkel/Seite	**Grad**	**Pr**	**Sec**		**Log sin ∢**		**Log Sinus**	**Grad**	**Pr**	**Sec**
α	23	31	30		9,601,136					
γα	30	8	55	**plus**	9,700,915					
					19,302,051					
β	90			**minus**	10,000,000					
Lösung:					9,302,051	Crus βγ	**9,302,051**	**11**	**33**	**52**

Georg Ludwig Frobenius (1566 – 1645)

Abbildung 7-4: Auszug aus dem Tabellenteil des [Frobenius] zu 23 Grad und 31 Minuten



23. GR. 49

Scr.	Sinus.	Logarithmi.	Tangetes.	Logarithmi.	Secantes.	Logarithmi.
30	3987491	9600700	4348124	9638302	10904411	10037602
31	3990158	0990	4351583	8647	5791	657
32	3992825	128[illegible]	4355043	8992	7172	712
33	3995492	[illegible]570	4358504	9337	8554	767
34	[illegible]	1860	4361966	9682	9938	822
35	4000824	2149	4365429	9640027	10911323	877
36	4003490	2439	4368893	0372	2709	932
37	4006156	2728	4372357	0716	4097	988
38	4008821	3017	4375822	1060	5485	10038043
39	4011485	3305	4379289	1404	6875	098
40	4014150	3593	4382756	1748	8267	154
41	4016814	3882	4386224	2091	9659	209
42	4019478	4170	4389693	2434	10921053	264
43	4022141	4457	4393163	2777	2448	320
44	4024804	4745	4396634	3120	3845	376
45	4027467	5032	4400105	3463	5243	431
46	4030129	5319	4403578	3806	6642	487
47	4032791	5606	4407051	4148	8042	542
48	4035453	5892	4410525	4490	9443	598
49	4038114	6179	4414001	4832	10930846	654
50	4040775	6465	4417477	5174	2250	709
51	4043436	6750	4420954	5516	3656	765
52	4046096	7036	4424432	5858	5063	821
53	4048756	7322	4427910	6199	6471	877
54	4051416	7607	4431290	6540	7880	933
55	4054075	7892	4434871	6881	9290	989
56	4056734	8176	4438352	7222	10940702	10039045
57	4059393	8461	4441834	7563	2115	101
58	4062051	8745	4445318	7903	3530	157
59	4064709	9029	4448802	8243	4946	214

N.V.	Logar.	N.V.	Logar.	N.V.	Logar.	N.V.	Logar.	N.V.	Logar.
4861	3686726	4881	3688509	4901	3690285	4921	3692053	4941	3693815
62	815	82	598	2	373	22	142	42	903
63	904	83	687	3	462	23	230	43	991
64	993	84	776	4	550	24	318	44	3694078
65	3687083	85	864	5	639	25	406	45	166
66	172	86	953	6	727	26	494	46	254
67	261	87	3689042	7	816	27	582	47	342
68	350	88	131	8	904	28	671	48	430
69	440	89	220	9	993	29	759	49	517
70	529	90	309	10	3691081	30	847	50	605
71	618	91	398	11	170	31	935	51	693
72	707	92	486	12	258	32	3693023	52	781
73	796	93	575	13	347	33	111	53	868
74	885	94	664	14	435	34	199	54	956
75	975	95	753	15	523	35	287	55	3695044
76	3688064	96	841	16	612	36	375	56	131
77	153	97	930	17	700	37	463	57	219
78	242	98	3690019	18	788	38	551	58	306
79	331	99	107	19	877	39	639	59	394
80	420	4900	196	20	965	40	727	60	482

Ggg

Frobenius lässt es dem Leser offen, welchen Weg der Berechnung er einschlägt. Allerdings weisen die umfangreichen und sehr genauen sieben- bzw sechsstelligen Tabellen der trigonometrischen Funktionen sowie der Logarithmen auf die Tendenz hin, den Logarithmen - die sich bekanntlich im Weiteren durchgesetzt haben - den Vorzug zu geben.

Eine andere Anwendung ist erst kürzlich veröffentlicht worden - das Herstellen eines "prosthaphäretischen Rechenschiebers" [Sher]. Das Prinzip ist in der folgenden Abbildungsserie festgehalten.

Abbildung 7-5 Das Prinzip des prosthaphäretischen Rechenschiebers

Of the many ways to prove (3), the following is the most useful in these circumstances because it suggests clearly how to make the prosthaphaeretic slide rule. It is sufficient for our purposes to consider only the case where A and B are acute angles, $A > B$, and $A + B < 90$ degrees. Figure 1, which follows, is of the unit circle in the first quadrant.

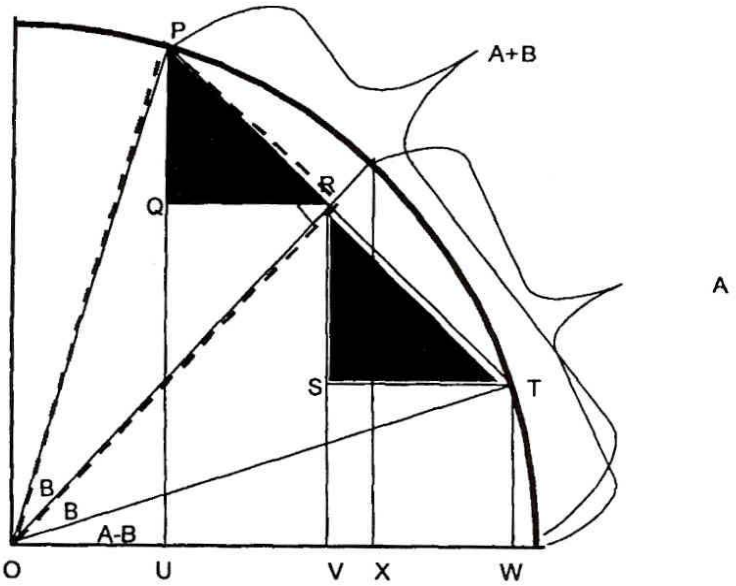


Figure 1

In Figure 1, $\overline{OU} = \cos(A+B), \overline{OW} = \cos(A-B)$ and $\overline{OR} = \cos B$ (use right triangle trigonometry on triangle ORP). Since triangles PQR and RST are congruent, it follows that $\overline{QR} = \overline{ST}$ and, thus, $\overline{UV} = \overline{VW}$. Since V is the midpoint of $\overline{UW}$, it follows that

Seitenrechnung: OV = OU + UV (1) und OV = OW - WV = OW - UV, da UV = WV.

Mit UV = OW - OV in (1) ergibt sich: OV = OU + OW - OV -> 2 OV = OU + OW

und damit OV = [OU + OW]/2

Abbildung 7-6 Fortsetzung des Beweises und Konstruktionsanleitung für den prosthaphäretischen Rechenschieber

$$\overline{OV} = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}$$

Using right triangle trigonometry on triangle OVR, we get $\overline{OV} = \overline{OR}\cos A = \cos B \cos A$ (since $\overline{OR} = \cos B$ from right triangle trigonometry on ORP). Thus,

$$\cos A \cos B = \overline{OV} = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}.$$

Figure 2 shows that similar triangles can also justify the design of our device. The proof uses the fact that the ratio of *b* to 1 is the same as the ratio of *ab* to *a*.

CONSTRUCTING THE PROSTHAPHAERETIC SLIDE RULE

Figure 1 now tells us how to multiply two numbers that lie between zero and one. Notice that $(\overline{OX})(\overline{OR}) = \overline{OV}$, since $\overline{OX} = \cos A$, $\overline{OR} = \cos B$ and $\overline{OV} = \cos A \cos B$. If we let $\overline{OX} = a$, $\overline{OR} = b$, and remove the now unnecesssary parts of Figure 1, we get Figure 2.

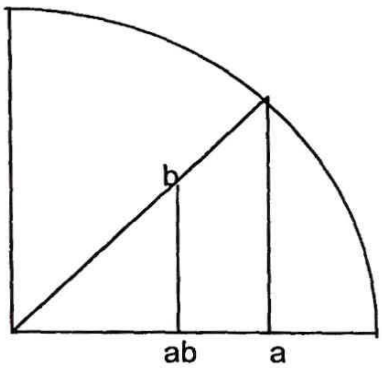


Figure 2

This figure shows how to construct the device:

1) Draw the first quadrant of the unit circle on a square surface. On the horizontal axis place a unit scale where 0 is at the origin and 1 is the radius of the unit circle. Subdivide the scale as finely as possible (tenths, hundredths, etc.)

2) Attach a rotor at the origin which has the same scale on it as the horizontal axis. The zero on this scale must be at the origin.

3) Attach to the square surface a slider that maintains a line perpendicular to the horizontal axis and can be moved left and right (much like the slider on a slide rule) always maintaining its perpendicularity.

Abbildung 7-7 Anwendung des prosthaphäretischen Rechenschiebers

The result is as follows:

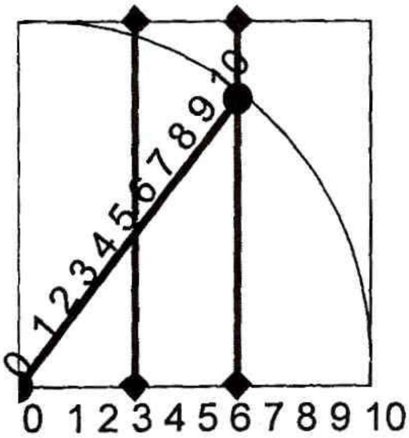


Figure 3: Scales in tenths

We can now see that multiplying two numbers between 0 and 1 is easy. Let's do 0.6×0.5 as an example.

1) Position the slider so that it passes through 0.6 on the horizontal axis.
2) Position the rotor so that its 1 coincides with the slider.
3) Without disturbing the rotor's position, move the slider until it passes through 0.5 on the rotor's scale.
4) The product (0.3) is at the intersection of the slider and the horizontal axis.

As Example 1 shows, any multiplication can be reduced to multiplying a pair of numbers between 0 and 1 and then adjusting the decimal point.

The device also does divisions. As an example of how to do $\frac{y}{x}$ when $0 < y < x < 1$, let's do $0.3 \div 0.5$.

1) Position the slider so that its vertical line passes through 0.3 on the horizontal axis.
2) Position the rotor so that 0.5 on its scale coincides with the slider.
3) Without disturbing the rotor's position, move the slider until it passes through 1 on the rotor's scale.
4) The answer (0.6) is at the intersection of the slider and the horizontal axis.

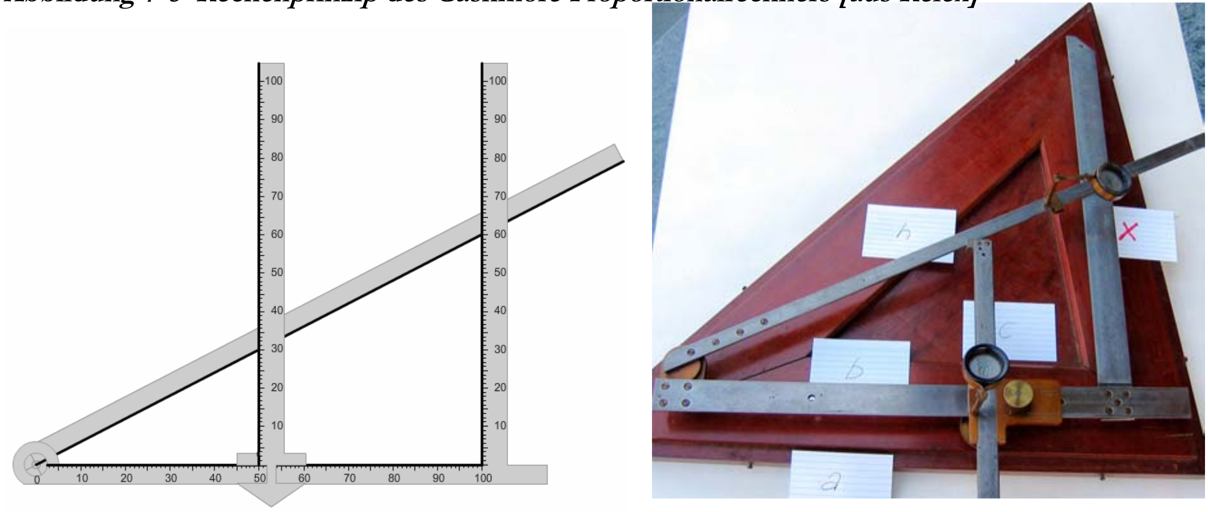
Die in Abbildung 7-7 enthaltene Figure 3 deutet auf die Anwendung des Strahlensatzes, der gerne zur Berechnung von Proportionen eingesetzt wird, hin und man hat sich dadurch natürlich weit von der eigentlichen Prosthaphärese entfernt. Von daher lassen sich die oben dargestellten Schritte zu einem "prosthaphäretischen Rechenschieber" als den geometrischen Übergang von den prosthaphäretischen Formeln zu den Strahlensätzen ansehen.

So ist es nicht verwunderlich, dass bereits seit längerem bekannte Rechengeräte dieses Prinzip des sogenanten "prosthaphäretischen Rechenschiebers" anwenden, ohne weder etwas mit der Prosthaphärese noch mit Logarithmen - wie sie zum Rechenschieber gehören - zu tun zu haben.

Zum Beispiel reichte bereits 1914 M. Cashmore in England ein Patent für einen technisch sehr schön anmutenden Proportionalrechner ein, der unter GB 191413073 auch patentiert wurde und ausführlich im Rechnerlexikon beschrieben wird [Relex]. Besonders die dort eingerichtete Flashanimation dieses Proportionalrechners zeigt das Rechenprinzip eindrucksvoll auf. Während hier der Hypothenuse keine rechnerische Bedeutung zugeordnet wird, lesen Sher und Nataro [Sher] auf ihrem Wege das Ergebnis auf der Hypothenuse (Figure 3) ab, weil sie vom Cosinus der Winkel A und B ausgehen. Cashmore erhält das Ergebnis der Multiplikation auf der beweglichen Gegenkathete eines einzigen Drehwinkels. Die derartige Anwendung des Strahlensatzes bringt also eine Vereinfachung.

Nach dem Kommentar einer bekannten Mathematikerin allerdings hat "der 'prosthaphäretische Rechenschieber' mit der Prosthaphärese etwa so viel zu tun wie mit einem Geodreieck bzw. einer Tobleroneschachtel".

Abbildung 7-8 Rechenprinzip des Cashmore Proportionalrechners [aus Relex]



Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{X}{c}$$

Mit a als Einheit (1 oder 10 oder 100), ergibt sich

$$\frac{c}{b} = \frac{X}{1}$$

Oder $c = X \bullet b$

Zu berücksichtigen sind die Kommastellen der Ergebnisse. In Abbildung 7-8 ist eingestellt :

X = 60, b = 50, ergibt c = 30 • 100 = 3000.

Als seit dem 17. Jahrhundert weit verbreitete Instrumente der Proportionalrechnung sei noch auf den Sektor und den von Jost Bürgi entwickelten Proportionalzirkel hingewiesen.

Weitere Anwendungen der Prosthaphärese hat Nicholas Rose [Rose] beschrieben. Zum einen stellt er die Bedeutung der Prosthaphärese in der Musik, als Erklärungshilfe in der Schwingungstheorie dar, zum anderen erklärt er, warum über einen Mittelwellensender kein high-fidelity Klang empfangen werden kann.

Die prosthaphäretische Methode wurde etwa hundert Jahre lang mit großem Eifer eingesetzt, weil sie eine große Rechenhilfe darstellte. Und nach den Arbeiten von Longomontan und Frobenius [Frobenius] zu urteilen, haben sich manche Rechner selbst nach der Veröffentlichung der Logarithmen weiter dieser ihnen vertrauten Methode bedient.

Andere hingegen haben sich mit den Logarithmen beschäftigt und deren Nutzen sehr geschätzt. So sagt der Astronom Johannes Kepler (1571-1630):

" Die Erfindung der Logarithmen kürzt monatelang währende Rechnungen bis auf einige Tage ab und verdoppelt dadurch das Leben der Rechner."

Hierzu hatte die Anwendung der Prosthaphärese auch einige Jahrzehnte beitragen können und sie mag gar der Zünder für die Entstehung der Logarithmen gewesen sein, denn auch John Napier (1550-1617) und Jost Bürgi (1552 - 1632), die Erfinder der Logarithmen, waren mit der Prosthaphärese vertraut. Bürgi hatte für seine Berechnungen zur Marsbeobachtung um 1590 die Prosthaphärese eingesetzt [Faustmann]. Nach Volker Bialas [Bialas] soll auch Johannes Kepler (1571-1630) seine "Epitome Astronomiae Copernicanae" (Abriss der Kopernikanischen Astronomie - 1618/1621) noch mit Hilfe der Prosthaphärese berechnet haben.

8 Zeittafeln und Zusammenfassung

Tabelle 8-1

Prosthaphärese Textgeschichte Zeittafel (nach Björnbo 1907)

Jahr	Ereignis/Zitat	Björnbo B Seite #; v. Braunmühl vB Seite#
6.06.1436	Johannes Müller geboren in Königsberg bei Haßfurt (Johann de Monte Regio; Regiomontanus), wurde mit 15 Jahren Schüler von Georg Peurbach	vB118
1446	Sebald Schreyer geboren, Gönner Werners	B153
1468	Kardinal Matthäus Lang geboren, Bischof von Gurk, später Erzbischof zu Salzburg; Gönner Werners (gest. 1540)	B153
14.02.1468	**Johannes Werner in Nürnberg geboren**	B150
1470	Willibald Pierckheimer in Nürnberg geboren; Gönner Werners; initiierte Pierckheimer Kreis	B153
6.07.1476	Johannes Regiomontanus gestorben in Rom: er hat so Großes geleistet, dass er all seine Zeitgenossen überragt und als ein Markstein am Beginne der neuen Zeit steht"	vB119
1477	Johannes Schöner geboren	B153
1489	Georg Hartmann, geboren	B158
1493-1497/8	Werner geht nach Italien - interessanter Weise trägt die Katalognummer des Cod.Regin. 1259 die Jahreszahl 1495. Allerdings kann dies nicht das Entstehungsjahr sein, da Zitate aus späterer Zeit darin enthalten sind (es sei denn, diese wurden später eingefügt)	B150
1497/8	Werner kehrt zurück nach Nürnberg und wird dort Pfarrer	B150
1504	Das Todesjahr von Bernhard Walther, der den Nachlass von Regiomontan verwaltet hat ("ängstlich verschlossen hielt"). Frühestens in diesem Jahr bekommt Werner dessen Arbeiten zu Gesicht und ärgert sich darüber, dass es so lange gebraucht hat, bis dies in seiner Heimatstadt Nürnberg, in der Walther gelebt hat (und Regiomontan arbeitete), möglich war.	B173; vB132

1505	Ab diesem Jahr wurde Werners Arbeit redigiert und sein Freund und Gönner Willibald Pirckheimer erwarb die Dreiecksbücher von Regiomontan (und wahrscheinlich an Werner weitergab). Werner hat in seinen Werken keinen Hinweis auf die Arbeiten von Regiomontan gegeben. Er nennt aber Euklid, Menelaos, Theodosios, Geber und Georg von Peuerbach und wie es scheint, waren deren Werke auch Grundlagen für das, was Regiomontan geschrieben hatte - weswegen Werner ihn wahrscheinlich nicht zitierte. "Aber wir kennen die Sorglosigkeit jener Zeit in der Wahrung des geistigen Eigentumes zur Genüge, um mit Recht zu vermuten, dass in Werner's Büchern über die Dreiecke nicht nur die Lösung dieser einen Aufgabe aus Regiomontan's Werk übergegangen sein dürfte. Jedoch war Werner ein so selbständiger Kopf, dass er ohne Zweifel auch das Überkommene originell verarbeitete. Dafür spricht z.B. die Umgestaltung von Regiomontan's Cosinussatz durch die Erfindung der sogenannten prosthaphäretischen Methode, die bisher einer viel späteren Zeit zugeschrieben wurde, während sie Werner's Eigentum ist."	B172, B173; vB135
1505-1513	Werner verfasst seine 5 Bücher über sphärische Dreiecke *(liber de triangulis sphaericis)* - *sphärische Trigonometrie in 5 Büchern unter dem Titel "De triangulis per maximorum circulorum segmenta constructis libri V", für die er leider keinen Verleger fand.*	B157; vB133
1514	seit 16 Jahren ist Werner Pfarrer; Erscheinungsjahr seines ersten Sammelbandes	B150
1514	Georg Joachim Rheticus, geboren	B158
1516	Konrad Gessner, geboren	B158
1446	Sebald Schreyer gestorben, Gönner Werners	B153
1522	Werners zweiter Sammelband erscheint mit seinen Arbeiten nach 1513; Titel: In hoc opere haec continentur. Libellus Ioannis Verneri Nurembergen. Super viginti duobus elementis conicis. Ejusdem: Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi eius problematis quod cubi duplicatio dicitur etc etc.	B153; Siehe Titelblatt aus Internet
1522	Johannes Stabius gestorben, Wiener Mathematiker und kaiserlicher Histiograph; Gönner Werners, auf dessen Veranlassung der Sammelband von 1514 erschien.	B153
1525	Kaspar Wolf, geboren.	B158
1525-1528	Werner ist Pfarrer am Friedhof zu St. Johannes	B151
1528	**Johannes Werner stirbt in Nürnberg, ohne dass eines seiner Werke gedruckt erschienen war.**	B150, B157
1530	Willibald Pierckheimer in Nürnberg gestorben.	B153
1533	Von Peter Apian erscheint eine Neuausgabe seiner *Introductio Geographica* zusammen mit einem Brief aus dem Jahre 1532, den er von Johann Wilhelm von Loubemberg erhielt, mit der Bitte, doch sein eigenes Buch von den Meteoroskopien erscheinen zu lassen, was auch geschah. Vermutlich ist Apians	B158

	Werk eine Kompilation aus den zwei ersten Büchern Werners.	
1537	Johann Richter genannt Praetorius, geboren.	B170
1542	Hartmann übergab bei einem Besuch in Nürnberg die schriftlichen Nachlässe Werners an Rheticus (laut Doppelmayr 1730), bestätigt als lose ungeordnete Blätter, wie die Trümmer eines Schiffbruchs.	B158, B160; vB133
1546	Herausgabe von Werners *Metereologischen Canones* durch Schöner	B153
1546	Tycho Brahe, geboren	B165
1547	Johannes Schöner gestorben - soll 1557 in Neuburg ein weiteres Regiomontan Werk "Fundamentum Operationem…" herausgegeben haben.	B153; vB123
1554	Jakob Christmann, geboren	B165
1555	Konrad Gessner, Bibliograph, sagt, dass der Nürnberger Mathematiker und Mechaniker Georg Hartmann die sechs Bücher Werners über die Meteoroskopie vom Untergang rettete.	B158
1555?	Paul Wittich, geboren - Schüler von Tycho Brahe	B167
1557	In Krakau erschien ein Buch, auf dessen Titelblatt die Titel der beiden Wernerschen Werke enthalten sind und als dessen Herausgeber Rheticus angeführt wird - "Nunc Primum Editi" also nicht vor 1557 veröffentlicht (Abbildung des Titels liegt vor) - gefunden von Eneström 1902 und Zebrawski 1873.	B159
Anmerkung	Rheticus zollt Werners Arbeiten Hochachtung und Respekt und gibt ihn auch als die Quelle an, was andere (Peter Apian) nicht getan haben. Und es wird vermutet, dass Werners Gliederung der verschiedenen Dreiecksformen auch Pate für das *Opus Palatinum* (1596) von Rheticus gestanden haben soll.	B162
1564	Georg Hartmann, gestorben	B158
1565	Konrad Gessner, gestorben	B158
1566; 1568-1569; 1575	Brahe ist in Wittenberg und könnte hier die Werner´schen Arbeiten über die Dreiecke gesehen haben; die von Brahe und Wittich benutzte Formel ist identisch mit der von Reimers genutzten; allerdings nicht mit der von Werner, da er den sinus versus einsetzt.	B169
1568	Rheticus hat die Hälfte des Riesenwerkes *Opus Palatinum* fertig	B164
1569	Praetorius besuchte Rheticus in Krakau und sah die Tafeln, die später im *Opus Palatinum* erschienen sind und hat wahrscheinlich gleichzeitig auch einen Blick auf Werners 4. Buch von der Sphärik werfen können.	B170
1571-1576	Praetorius Professor der höheren Mathematik in Wittenberg	B170
1574 und 1583	Kaspar Wolf gibt in Gesners neuer Bibliographie an, dass, wenn er sich nicht irre, Georg Joachim Rheticus die sechs Bücher über *Meteoroskopie* und die vier *de*	B158

	triangulis editiert habe.	
1576	Georg Joachim Rheticus, in Kaschau, Ungarn gestorben - bis dahin blieb das Druckmanuskript der Wernerschen Werke in seinem Besitz.	B158, B165
1576	Der Schüler von Rheticus L. Valentin Otho (~1550 in Magdeburg) erhält nach dem Tode von Rheticus dessen Nachlass (mit Wernerschen Manuskripten).	B165
1580	"Wiedererfindung" (nach v. Braunmühl) der Prosthaphärese durch Tycho Brahe und Paul Wittich in Uranienborg auf Hven.	B167, B168; vB193
1584	In diesem Jahr kam nun an den Hof des Landgrafen Wilhelm IV (1532 - 1592) zu Kassel ein gewisser Paul Wittich (1555? - 1587) aus Breslau, der sich von 1580 bis 81 bei Tycho auf der Uranienburg aufgehalten hatte, und blieb längere Zeit in Kassel. Von ihm berichtet sowohl Bürgi als auch ein gewisser Raymarus Ursus, er habe den ersten Fall der sogenannten prosthaphäretischen Methode, die wir S. 135 als eine Erfindung Werner's kennen lernten, den Kasseler Astronomen als eine Rechnungsmethode gezeigt, die schon länger auf der Uranienburg bei den astronomischen Berechnungen angewendet werde, ohne jedoch einen Beweis dafür anzugeben. Ursus erzählt dann weiter, dass Bürgi hierfür einen so fruchtbaren Beweis gefunden habe, dass aus ihm der andere prosthaphäretische Fall und sein (des Ursus) Beweis, ja die Auflösung aller Dreiecke durch diese Methode vermmittelst der Sinusse, Tangenten und Sekanten hergeleitet werden könne."	vB194; vB195
1587	Paul Wittich, gestorben	B167
1588	Nicolai Reimers alias Nikolaus Raymarus Ursus gibt sein *Fundamentum Astronomicum* in Straßburg heraus; darin ist die Wernersche Prosthaphäresis (beide prosthaphäretischen Regeln samt ihrer Ableitung in zwei Diagrammen) das erste Mal veröffentlicht.	B168, B171; vB195
1589/1590	Brahe beschwert sich in Briefen an Hayck, dass Nicolai Reimers die prosthaphäretischen Regeln gestohlen haben soll.	B168, B169
1590	allerdings ohne die entsprechenden mathematischen Beweise. Die soll Reimers von Jobst Bürgi in Kassel erhalten haben, wohin sie (die Formeln) angeblich von Paul Wittich gebracht wurden.	B169
1599	Nicolai Reimers stirbt.	B169
1599	Johann Prätorius führt in seinem Cod. lat. monac. 24101 aus, dass Werner der Erfinder der prosthaphäretischen Gleichung ist, die ein gewisser Schuler in eine etwas einfachere Gestalt gebracht habe.	vB137 Fußnote 2
1601	Kaspar Wolf, gestorben	B158
1601	Tycho Brahe, gestorben	B165
1611	In Jakob Christmanns *Theoria Lunae* werden die beiden Wernerschen Arbeiten zitiert und eine Form der Prosthaphärese genutzt, um den Winkel B des schiefwinkeligen sphärischen Dreiecks bei bekannten Seiten a,b,c zu finden - "..und dass dieser darin jene Methode entwickelt und an drei Figuren erläutert habe."	B165; vB136

1613	Jakob Christmann, Professor, gestorben - nicht 1630 wie angegeben	B165
1616	Johann Richter genannt Praetorius, gestorben	B170
zwischen 1654 und 1689	Königin Christina hat die Handschriften von Werner, die inzwischen im Besitze von Jakob Christmann waren, erhalten. Nach ihrem Tode (1689) lag die Handschrift (Cod. Regin. 1259) fast unbeachtet im Vatikan.	B171
1622	Longomontan hat die Erfindung der Prosthaphärese in seiner *Astronomica Danica* von 1622 (Seite 10) dem Paul Wittich zugeschrieben und war damit Ursprung der Ansicht aller anderen späteren Historiker.	vB136 Fußnote 2
	Rheticus hatte die Handschriften von Werner bis zu seinem Tode (1576) in Krakau verwahrt und sie evtl. als Unterstützung beim Erstellen seines "*Opus Palatinum*" eingesetzt.	
	Die Handschriften enthielten keine mathematischen Figuren, was darauf hindeutet, dass das Skript als Druckvorlage erstellt worden ist.	vB145
	Zur Rolle von Jost Bürgi bei den Berechnungen mit Hilfe der prosthaphäretischen Methode und deren Beweisen gibt es wohl einiges zu sagen!	**vB194ff**
1622	Die Methode der Prosthaphäresis erfreute sich einer solchen Beliebtheit, dass sie auch noch nach der Erfindung der Logarithmen (1614) längere Zeit in Gebrauch blieb. So empfahl sie der Däne Christian Severin Longomontan (1562 - 1647), welcher ein langähriger Gehilfe Tycho's gewesen war und nach dessen Tode Professor der Mathematik in Kopenhagen wurde auf das wärmste. In seiner schon erwähnten "Astronomica Danica" von 1622 gibt er ihr sogar den Vorzug vor den ihm wohlbekannten Logarithmen. " weil durch sie die Regeldetri mit Behandlung der gegebenen Dinge selbst vollführt wird", während "das Verfahren mit den Logarithmen zu weit von beständiger Ansicht der Beweise entfernt, die vielleicht Anfängern nötiger ist".	vB202
1634	Ein Beweis dafür, dass sich die Astronomen nur schwer von der so beliebt gewordenen prosthaphäretischen Methode trennten, ist, dass noch 1634 der Hamburger Georg Ludwig Frobenius (1566 - 1645) in seinem "*Clavis Universi Trigonometrica*" - genauer Titel: Clavis universi trigonometrica : per quam coeli ac terrae adyta recludi, et omnes de motibus ac dimensionibus utriusque per hypotheses artificum triangulari forma conceptae quaestiones per certa problemata resolvi et in apertum produci possunt, triplici, qua fieri potest, methodo ... ; Accedunt tabulae pro negocio hoc trigonico ... / studio & opera Georgii Ludovici Frobenii Iphoviensis Franci, nunc civis Hamburgensis - alle mitgeteilten Beispiele sind sowohl mittelst der Logarithmen, als mit der Prosthaphäresis berechnet, obwohl er für seine Person den ersteren bereits den Vorzug gibt und sogar vom Gebrauch der letzteren warnt, wenn statt der Sinusse andere Funktionen auftreten.	vB203
1573	Seqvvntvr Igitvr Nvnc Canones Tvm Mediorvm seu aequalium motuum, tum Prosthaphaereseon : deniq[ue] alij Canones quorum Catalogus supra recitatus est; Reinhold, Erasmus 1573	Unibibliothek Göttingen

1610	Tabvlae Arithmeticae Prosthaphaireseōs Vniversales : Qvarvm Svbsidio Nvmervs Qvilibet, Ex Mvltiplicatione Prodvcendvs, Per Solam Additionem: Et Qvotiens Qvilibet, E Divisione eliciendus, per solam subtractionem, sine taediosâ & lubricâ Multiplicationeis, atque Diuisionis operatione, etiam ab eo, quie Arithmetices non admodum sit gnarus, exactè, celeriter & nullo negotio inuenitur / E' Mvseo Ioannis Georgii Herwart Ab Hohenbvrg ...Verfasser: Herwarth von Hohenburg, Johann Georg 1610	Unibibliothek Göttingen
1822	Charles Hutton erwähnt in der Einleitung der 5. Auflage seiner Mathematical Tables (S. 4) John Werner of Nuremberg (1468-1528) als Autor von 5 Büchern zu Dreiecken	

Zusammenfassung

1901 zog Axel Anthon Björnbo in den Vatikan, um sich mit dem handgeschriebenen Gesamtwerk "Joannis Verneri Norimbergensis de triangulis sphaericis" in vier Büchern und "Joannis Verneri Norimbergensis de meteoroscopiis" in sechs Büchern zu beschäftigen. Dabei stellte er fest, dass dieses Gesamtwerk (eine Abschrift) durch einen mathematisch ungebildeten Schönschreiber von einer - wahrscheinlich schlecht leserlichen - Vorlage abgeschrieben worden war.

Sicher ist, dass es sich nicht um die Handschrift von Werner handelt. Allerdings bestätigte der Inhalt dieses Werkes die bereits vorher geäußerte Vermutung (v. Braunmühl, Heilbronner, Montuela, Eneström), dass Johannes Werner der Vater der Prosthaphärese ist. vB141 Fußnote 1

Werner ist als Erfinder der prosthaphäretischen Formel identifiziert ! Er hat schon recht früh (1502 – möglicherweise bereits 1495) daran gearbeitet. Allerdings sind seine Werke nie veröffentlicht worden, sondern als Handschriften (z.T. ungeordnet, fehlerbehaftet, unvollständig, unleserlich) in die Hände anderer gelangt (z.B. Rheticus).

Wahrscheinlich hat sich Werner bei seinen Arbeiten an den in Nürnberg entstandenen (und vorliegenden) Arbeiten des Regiomontan orientiert, ohne ihn jedoch zu zitieren. Björnbo nimmt an, dass all das, was Regiomontan zusammengetragen hat, auch Werner bereits bekannt war. B172

"Schon bei Ibn Jûnos (950 - 1009) - Herausgeber der hakimitischen Tafeln - fanden wir eine Anwendung der zweiten dieser Formeln und zweifeln nicht, dass sie die Araber auf verschiedene Weise anzuwenden wußten, obwohl es uns nicht möglich ist, dazu einen direkten Beweis für diese Ansicht zu erbringen. vB136; vB63

Keinesfalls aber hat Werner von ihnen die Kenntnis der Methode überkommen, da sie sich in den damals bekannten arabischen Schriften nirgends findet. Somit müssen wir ihn wohl als selbständigen Erfinder der nachmals im Abendlande so viel gebrauchten Methode ansehen, wenn es uns nachzuweisen gelingt, dass er sich ihrer schon in seinen fünf Büchern über Dreiecke bediente." - Diese Aussage zu Ibn Jûnos stimmt so nicht, wie D.A. King zeigte.

„Zeitgenossen“ von Johannes Werner

im Zusammenhang mit der Prosthaphärese

Name	Daten
Bernhard Walther	1430 - 1504
Johannes Müller / Regiomontan	1436 - 1476
Sebald Schreyer	1446 - 1520
Lorenz Beheim	1457 - 1521
Johannes Stabius	1460 - 1522
Erasmus Topler	1462 - 1512
Johannes Werner	1468 - 1528
Willibald Pierckheimer	1470 - 1530
Johannes Schöner	1477 - 1547
Christoph Scheurl II	1481 - 1542
Georg Hartmann	1489 - 1564
Peter Apian	1495 - 1552
Erasmus Reinhold	1511 - 1553
Georg Joachim Rheticus	1514 - 1576
Konrad Gesner	1516 - 1576
Kaspar Wolf	1525 - 1601
Bartholomäus Scultetus/Schulz	1532 - 1614
Christoph Clavius	1537 - 1602
Johann Richter / Prätorius	1537 - 1616
Tycho Brahe	1546 - 1601
Valentinus Otho	1550 - 1605
John Napier	1550 - 1617
Nicolaus Reimers / Ursus	1551 - 1600
Jost Bürgi	1552 - 1632
Jakob Christmann	1554 - 1613
Paul Wittich	1555 - 1587
Melchior Jöstel	1559 - 1611
Christian Severin Longomontan	1562 - 1647
Georg Ludwig Frobenius	1566 - 1645
Johannes Kepler	1571 - 1630

9 Literatur

Bartsch	Bartsch, Hans-Jochen; Liebscher, Herbert: Handbook of Mathematical Formulas; New York, London: Academic Press, 1974 (Translation of the 9th edidtion of "Mathematische Formeln" by Herbert Liebscher, Leipzig)	
Bialas	Bialas, Volker: Die Rudolphinischen Tafeln von Johannes Kepler; Nova Kepleriana, Bayerische Akademie der Wissenschaften, Neue Folge, Heft 139; München: Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1969	
Björnbo	Björnbo, Axel Anthon (Hrsg.): Ioannis Verneri: De Triangulis Sphaericis, Libri Quatuor; De Meteoroscopiis, Libri Sex; cum Prooemio Georgii Ioachimi Rhetici; In Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, begründet von Moritz Cantor. XXIV. Heft ; Band I De Triangulis Sphaericis; Leipzig: B.G. Teubner, 1907	
Borchers	Borchers, Brian: Prosthapheresis; Journal of the Oughtred Societey Vol 14 Nr. 2 (2005) S. 3	
Boyer	Boyer, C.B.; Merzbach, U.C.: A History of Mathematics, 2nd edition; New York: John Wiley and Sons, 1989	
Christmann	Christmann, Erwin: Studien zur Geschichte der Mathematik und des mathematischen Unterrichts in Heidelberg : von der Gründung der Universität bis zur combinatorischen Schule. - 1924. - 164 S. Univ. Heidelberg, Diss., 1924 Seite 79 - 85 http://www.ub.uni-Heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/edd/erwin.htm	
Eneström	Eneström, G.: Über eine wiedergefundene Handschrift; Bibliotheca Mathematica, Heft 3, 1902 S. 242-243	
Enzykl	Kleine Enzyklopädie Mathematik; Leipzig: VEB Bibliographisches Institut, 1965 S. 70	
Faustmann	Faustmann, Gerlinde; private Mitteilung	
Frobenius	Frobenius, Georg Ludwig: Clavis Universi Trigonometrica: per quam coeli ac terrae adyta recludi, Hamburg 1634	
Gingerich 1988	Gingerich, Owen; Westman, Robert S.: The Wittich Connection: Conflict and Priority in Late Sixteenth-Century Cosmology; Transactions of the American Philosophical Society Vol 78, Part 7, 1988 S. 69	
Gingerich 2005	Gingerich, Owen: The Book Nobody Read; London: Arrow Books, 2005	
King 1972	King, David A.: 1972	
King 1973	King, David A.: Ibn Yunus' very useful tables for reckoning time by the sun;	

	Archive for History of Exact Sciences Vol 10, 1973 (S. 342 - 394)	
Lutstorf	Lutstorf, Heinz und Walter, Max: Jost Bürgi's Progress Tabulen; Schriftenreihe der ETH-Bibliothek, Nr. 28 Zürich 1992	
Mathworld 11	Werner Formulas im Internet; Weisstein, Eric W. Stand 28.11.2007 unter http://mathworld.wolfram.com/WernerFormulas.html	
Mathworld 12	Prostaphaeresis Formulas im Internet; Stand 9.12.2007 unter http://mathworld.wolfram.com/ProstaphaeresisFormulas.html	
Mehl	Johannes Werner im Internet; Stand 7.12.2007 unter http://serge.mehl.free.fr/chrono/werner.html	
Nürnberg	Johannes Werner im Internet; Stand 7.12.2007 unter http://www.naa.net/ain/personen/jwerner.asp mit Links zur Allgemeinen Deutschen Biographie und Zedlers Universallexikon	
Pierce	Pierce, R.C.: A Brief History of Logarithms; The Two-Year College Mathematical Journal Vol 8 Nr 1, 1977 S. 22-26	
Relex	http://www.Rechnerlexikon.de/artikel/Cashmore_Proportion_Calculator mit Arbeiten von B. Häberlein und P. Kradolfer sowie http://www.Rechnerlexikon.de/artikel/Consul	
Rose	Rose, Nicholas J.: Prostaphaeresis im Internet; Stand 22.12.2007 unter www4.ncsu.edu/~njrose/pdffiles/prostha.pdf	
Sher	Sher, D.B.; Nataro, D.C.: The Prosthapheretic Slide Rule: A Mechanical Multiplication Device Based on Trigonometric Identities; Mathematics and Computer Education 38 (1): 37-43, 2004	
Simpson	Simpson, Thomas Marshall: Plane Geometry and Logarithms; The John C. Winston Company, Philadelphia 1930	
Symposium 2005	Proceedings of the Symposium on Christoph Clavius (1538 - 1612) University of Notre Dame 2005 (siehe Artikel von Paul A. Schweitzer, Rio de Janeiro, Seite 6)	
Thoren	Thoren, Victor E.: Prosthaphaeresis Revisited; Historia Mathematica, 15:32-39 (1988)	
von Braunmühl 1897	von Braunmühl, Anton: Beiträge zur Geschichte der Trigonometrie, Nova Acta, Abh. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Band LXXI, Nr. 1: Halle: 1897 S. 26	
von Braunmühl 1899	von Braunmühl, Anton: Zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie; Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 9 Seite 17 - 29 (Cantor-Festschrift), Leipzig 1899	
von Braunmühl 1900	von Braunmühl, Anton: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie; Teil I und II; Leipzig, 1900 (Sändig Reprint Verlag: 2002)	

Wikipedia Prostha	Prosthaphaeresis im Internet bei Wikipedia; Stand 28.11.2007 unter http://en.wikipedia.org/wiki/Prosthaphaeresis	
Wikipedia Werner	Prosthaphaeresis im Internet bei Wikipedia; Stand 25.12.2007 unter http://de.wikipedia.org/wiki/ Johannes_Werner	
Würschmidt	Würschmidt, Joseph (Hrsg.) unter Benutzung der Vorarbeiten von Dr. A. Björnbo: Ioannis Verneri: De Triangulis Sphaericis, Libri Quatuor; De Meteoroscopiis, Libri Sex; cum Prooemio Georgii Ioachimi Rhetici; Band II De Meteoroscopiis; Leipzig: B.G. Teubner, 1913	

Verfasser:
Dr. Klaus Kühn
D-82239 Alling
kk@IASim.de

10 Der Weg der Handschrift de Triangulis Sphaericis Libri Quatuor