Die Berechnung der Logarithmentafeln durch Napier und Briggs

Thomas Sonar
Institut *Computational Mathematics*
TU Braunschweig
Pockelsstraße 14
38106 Braunschweig
t.sonar@tu-bs.de

27. September 2004

Zusammenfassung

Wir kennen die Logarithmen heute als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $y = a^x$ und lernen in der Schule die Funktionalgleichung kennen. Dadurch geht ganz wesentlich die historische Bedeutung dieser Funktion unter, die man gar nicht hoch genug einschätzen kann. Die Entwicklung der Logarithmen zu Beginn des 17. Jahrhunderts ist nur noch mit der Revolution zu vergleichen, die die Erfindung des Computers im 20. Jahrhundert bedeutet hat. Wir gehen der Frage nach, wie es den Alten möglich war, umfangreiche Logarithmentabellen mit der Hand zu berechnen.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Logarithmen heute und ihre frühere Bedeutung

Wir definieren heute die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion, d.h.

$$x = \log_a y \quad :\Longleftrightarrow \quad y = a^x.$$

Man nennt $a > 0$ die **Basis** des Logarithmus. Der Fall $a = 1$ muß ausgeschlossen werden, denn für alle x gilt ja $1^x = 1$, so daß diese Funktion ganz sicher nicht umkehrbar ist; der Logarithmus zur Basis 1 existiert also ganz einfach nicht!

Als die Logarithmen entstanden - an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert - stand aber die Funktionalgleichung im Vordergrund des Interesses:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

Man kann sich heute, im Zeitalter des Computers, gar nicht mehr vorstellen, welche Revolution des händischen Rechnens es bedeutet hat, als im Jahr 1614 mit dem Buch *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Beschreibung der wundervollen Tafeln der Logarithmen) die erste Logarithmentafel der Welt erschien. Autor war der schottische Lord John Napier (1550-1617) und der berühmte Astronom Johannes Kepler war gleich 1614 der erste 'Kunde', denn er hätte ohne die Logarithmen seine Arbeiten am dritten Planetengesetz nicht fertig bekommen - seine Lebenszeit hätte schlicht nicht ausgereicht für die vielen Berechnungen mit vielstelligen Zahlen! Bald darauf haben findige Mathematiker den **Rechenschieber** erfunden, mit dem sich komplizierte Operationen durch Zurückführung auf logarithmische Skalen rein mechanisch durchführen ließen.

Vor der Einführung der Logarithmen gab es bereits eine beliebte, aber umständliche Methode, um die Multiplikation auf die Addition zurückzuführen, die sogenannte **Prostapharese**. Die Methode basiert auf den Additionstheoremen

$$\begin{array}{c|l} & \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ + & \cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ \hline & \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos x \cdot \cos y \end{array}$$

also

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y).$$

Wollte man zwei Zahlen A und B miteinander multiplizieren, suchte man in der Sinus-Tabelle (die ja auch eine Cosinus-Tabelle ist) diejenigen Winkel x und y, für die $\cos x = A$ und $\cos y = B$ ist. Nun suchte man in der Tafel den Cosinus von $x+y$ und $x-y$ und hatte nach obiger Formel das Produkt $A \cdot B$ berechnet! Wie schrieb schon Otto Toeplitz in [1]:

> Für die Zwecke der Astronomie und Nautik, die an sich viel Sinus und Kosinus zu multiplizieren haben, eine gar nicht üble Methode; und doch umständlich.

Nun aber zurück zu den Logarithmen: Wendet man die Funktionalgleichung auf ein Produkt von n gleichen Zahlen an, dann erhält man

$$\log_a x^n = n \log_a x,$$

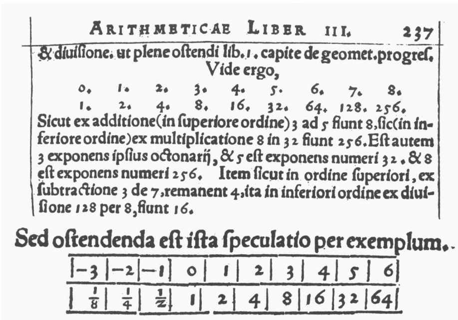
man kann also die Multiplikation auf die Addition, und die Potenzierung auf die Multiplikation zurückführen. Damit läßt sich natürlich auch die Division auf die Subtraktion zurückführen, denn mit den beiden obigen Regeln folgt leicht

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a\left(x_1 \cdot x_2^{-1}\right) = \log_a x_1 + \log x_2^{-1} = \log_a x_1 - \log_a x_2.$$

Wir wollen im folgenden der Frage nachgehen, wie denn die Idee des Logarithmus in die Welt kam und wie unsere Vorväter ohne die Hilfe eines Computers große Logarithmentabellen herstellen konnten!

2 Michael Stifel und John Napier

Im Jahr 1544 veröffentlichte der protestantische Mönch Michael Stifel sein Buch *Arithmetica Integra.* Stifel schrieb zwei Skalen übereinander, die er A-Skala (von **A**rithmetischer Progression), bzw. G-Skala (von **G**eometrischer Progression) nannte, wie in Abbildung 1. An dieser Tabelle fiel ihm auf, daß er die Mul-


ARITHMETICAE LIBER III. 237

& diuiſione. ut plene oſtendi lib. 1. capite de geomet. progreſ. Vide ergo,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Sicut ex additione (in ſuperiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, ſic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Eſt autem 3 exponens ipſius octonarij, & 5 eſt exponens numeri 32. & 8 eſt exponens numeri 256. Item ſicut in ordine ſuperiori, ex ſubtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuiſione 128 per 8, fiunt 16.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Abbildung 1: Michael Stifels Skalen

tiplikation $8 \cdot 128$ ausführen konnte, wenn er von der G-Skala auf die A-Skala wechselte und die zugehörigen Zahlen der A-Skala *addierte*, d.h. er rechnete $3 + 7 = 10$. Dann ging er zur Zahl 10 auf der A-Skala, blickte hinunter zur korrspondierenden Zahl der G-Skala, und fand dort das Ergebnis der Multiplikation, nämlich 1024. Die Idee, die Multiplikation durch die Addition zu ersetzen, war geboren!

John Napier kannte mit hoher Wahrscheinlichkeit das Stifelsche Buch. Er bemerkte, daß die geometrische Skala wegen

$$\frac{g_{i+1}}{g_i} = 2$$

(g_i soll eine der Zahlen auf der G-Skala bezeichnen) immer größere Lücken bekommt, je weiter man auf ihr fortschreitet. So ist eine Multiplikation von 199 mit 742 gar nicht mehr möglich, weil die G-Skala viel zu grob ist. Er wollte also

$$\frac{g_{i+1}}{g_i} \approx 1$$

realisieren.

2.1 Die Napiersche Konstruktion einer Logarithmentabelle

Napiers Wahl fiel auf $g_{i+1}/g_i = 0.9999999 = 1 - 10^{-7}$. Er begann mit einer Tabelle der ersten 100 Zahlen der Form

$$10^7(1-10^{-7})^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 100.$$

Die Wahl der Zahl 10^7 war sehr weise! In Napiers Zeiten kannte man die Verwendung des Dezimalpunktes noch nicht, alle Rechnungen mußten also so ausführbar sein, daß keine Kommastellen eine Rolle spielen konnten. Die Bezugsgröße aller Berechnungen damals war der *whole sine*, der 'ganze Sinus'. Dies war bei Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck stets die Hypothenuse. Wird diese deutlich kleiner als 10^7 gewählt, dann laufen Berechnungen ohne Rücksicht auf Nachkommastellen schief; wählt man eine Zahl weit größer als 10^7, dann hat man nur unnötig viel Arbeit. Napier wußte also sehr genau, was er da tat!

Übrigens ist erst nach Napiers Tod klargeworden, wie er die Logarithmen berechnet hat! Im Jahr 1619 erschien sein Buch *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (Die Konstruktion der wundervollen Tafeln der Logarithmen), aus dem wir nun berichten.

Die erste Zahl in der Tabelle - $n = 0$ - ist klar: 10^7. Bei der zweiten muß man $10^7(1-10^{-7})^1 = 10^7 - 10^7 10^{-7} = 10^7 - 1$ berechnen. Bei der dritten müßte man eigentlich schon Potenzieren: $10^7(1-10^{-7})^2$. Aber hier hatte Napier vorgesorgt: **Alle Zahlen der Tabelle sind durch Subtraktion zu berechnen!**. Das sieht man so: Nehmen wir an, die Zahl $10^7(1-10^{-7})^k$ ist bereits berechnet. Dann ist

$$\begin{aligned} 10^7(1-10^{-7})^{k+1} &= \underbrace{10^7(1-10^{-7})^k}_{\text{bereits berechnet!}} \cdot (1-10^{-7}) \\ &= \underbrace{10^7(1-10^{-7})^k}_{\text{bereits berechnet!}} - \underbrace{10^7(1-10^{-7})^k}_{\text{bereits berechnet!}} \cdot 10^{-7}, \end{aligned}$$

aber die Multiplikation mit 10^{-7} ist nichts anderes als eine Kommaverschiebung um sieben Stellen nach links! Man muß also zur Berechnung einer neuen Zahl in der Tabelle nur die vorhergehende Zahl nehmen, das Komma sieben Stellen nach links schieben, und diese Zahl von der vorhergehenden abziehen! Damit ergibt sich die erste Tabelle in Napiers *Constructio* wie in Abbildung 2 gezeigt. Die

n	$10^7(1-10^{-7})^n$.
0	10000000.0000000
	-1.0000000
1	9999999.0000000
	-0.9999999
2	9999998.0000001
	......
100	9999900.0004950

Abbildung 2: Napiers erste Tabelle

Zahlen n heißen nach Napier die **Logarithmen** der rechts stehenden Zahlen, d.h. nach Napier ist 100 der Logarithmus von 9999900.0004950. Der Napiersche Logarithmus einer Zahl x ist also die Anzahl der Multiplikationen von 10^7 mit $1-10^{-7}$, bis x herauskommt. Wir schreiben dafür

$$y = \mathrm{NapLog} x \quad :\Leftrightarrow \quad x = 10^7(1-10^{-7})^y.$$

Sind zwei Logarithmen gegeben:

$$\begin{aligned} x &= 10^7(1-10^{-7})^y, \\ \tilde{x} &= 10^7(1-10^{-7})^{\tilde{y}}, \end{aligned}$$

dann ist ihr Quotient

$$\frac{x}{\tilde{x}} = (1-10^{-7})^{y-\tilde{y}}.$$

Die Differenzen der Logarithmen sind also nur abhängig vom Quotienten von x und $\tilde{x}$! Daher kommt der Name 'Logarithmus', der aus den griechischen Wörtern *logos* und *arithmos* gebildet wurde und so etwas wie 'Quotientenzahl' bedeutet.

Aufgabe: Wie viele Schritte hätte John Napier machen müssen, um die Ausgangszahl 10^7 auf die Hälfte, also $5 \cdot 10^6$, zu reduzieren?

Lösung: Wir fragen nach der Anzahl der Schritte, so daß $(1-10^{-7})^n = \frac{1}{2}$ gilt. Mit unserem modernen Logarithmus folgt

$$n \log_{10}(1-10^{-7}) = -\log_{10} 2,$$

also

$$n = -\frac{\log_{10} 2}{\log_{10}(1-10^{-7})} \approx 6931471.$$

□

Da hätte er viel zu tun gehabt! Aber nun bemerkt Napier, daß

$$10^7(1-10^{-7})^{100} \approx 10^7(1-10^{-5})$$

gilt! Er macht jetzt also weiter mit einer zweiten Tabelle, die die Zahlen $10^7(1-10^{-5})^n, n = 0,1,2,\ldots,50$ enthält. Aus den ersten beiden Tabellen wird sodann eine dritte erstellt, die aus 21 Zeilen und 69 Spalten besteht. Aus dieser dritten Tabelle interpoliert sich Napier nun seine Logarithmen. für weitere Details dieser Prozedur inklusive einiger Beispiele sei auf das Buch von Edwards [3] verwiesen.

2.2 Zwei offensichtliche Nachteile

Die eben geschilderte Vorgehensweise zur Berechnung einer Logarithmentabelle hat zwei offensichtliche Nachteile. Zum einen hängt ein berechneter Logarithmus von den vorher berechneten ab. Macht Napier also einen Rechenfehler (und die hat er tatsächlich ab und zu gemacht!), dann sind alle nachfolgenden Logarithmen fehlerhaft. Der zweite Nachteil liegt im gewählten Ansatz: Es gilt

$$\mathrm{NapLog} 10^7 = 0$$

und $\mathrm{NapLog} x_1 < \mathrm{NapLog} x_2$ für $x_2 > x_1$. Das ist ja nun wirklich nicht der Logarithmus, den wir kennen! Aber noch etwas ist nicht schön: Wir haben eine *diskrete* Version des Napierschen Logarithmus kennengelernt, die Zahl für Zahl definiert ist. Wir brauchen aber eine *Funktionsdefinition*, um vernünftig arbeiten zu können. Diese Interpretation als *kontinuierliche* Funktion hat aber schon Napier selbst gegeben!

2.3 Das kinematische Modell

Um sich seinen Logarithmus vorstellen zu können, bediente sich John Napier eines kinematischen Modells. Dazu betrachtete er eine Strecke $\overline{AB}$, auf der ein Punkt C zur Zeit $t = 0$ bei A startet. Seine Geschwindigkeit ist stets gleich dem Abstand $\overline{CB}$, d.h. bei $t = 0$ ist die Geschwindigkeit gerade $v_C(0) = \overline{AB}$ und dann wird der Punkt beständig langsamer, $v_C(t) = \overline{CB} = x$. Zur gleichen Zeit ($t = 0$) startet ein Punkt C' auf einer nach rechts unbeschränkten Strecke am Punkt A'. Seine Geschwindigkeit ist konstant $v_{C'}(t) = \overline{AB}$. Wählt man den Abstand $\overline{AB}$ als $\overline{AB} = 10^7$, dann ergibt sich aus diesem kinematischen Modell genau der Napiersche Logarithmus! Es gilt nämlich

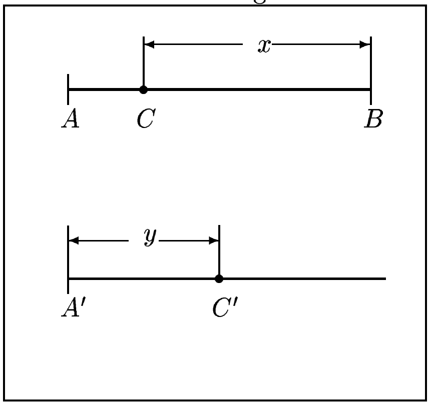


Abbildung 3: Napiers kinematisches Modell

$$y = \mathrm{NapLog}x.$$

2.4 Folgerungen aus dem Modell

Das kinematische Modell Napiers erlaubt uns nun eine moderne Analyse des Napierschen Logarithmus. Die Geschwindigkeit des Punktes C ist offenbar die Änderung des Weges bezüglich der Zeit. Der Weg ist offenbar $\overline{AC} = \overline{AB} - \overline{CB} = 10^7 - x$ und die Geschwindigkeit ist gleich dem Abstand $\overline{CB} = x$, also

$$\frac{d}{dt}(10^7 - x) = x.$$

Bei y ist es noch einfacher, denn die Geschwindigkeit ist konstant. Hier gilt

$$\frac{dy}{dt} = \overline{AB} = 10^7.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

und es ergibt sich als Lösung

$$x(t) = K\mathrm{e}^{-t},$$

was man, wenn man es nicht sofort erkennt, durch Ableiten verifizieren kann. Wegen $x(0) = \overline{AB} = 10^7$ folgt $K = 10^7$, also

$$x(t) = 10^7\mathrm{e}^{-t}. \tag{1}$$

Die Gleichung für y ist noch einfacher gelöst, denn

$$y(t) = 10^7 t + k,$$

wobei wegen $y(0) = 0$ die Konstante k zu $k = 0$ folgt, also

$$y(t) = 10^7 t. \tag{2}$$

Wendet man den natürlichen Logarithmus $\ln = \log_e$ auf (1) an, dann folgt

$$\ln x = \ln 10^7 - t \underbrace{\ln e}_{=1} = \ln 10^7 - t,$$

also

$$t = \ln 10^7 - \ln x = \ln\left(\frac{10^7}{x}\right).$$

Dies eingesetzt in (2) bringt uns schließlich

$$y = \text{NapLog } x = 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x}\right). \tag{3}$$

Die Funktionsdarstellung (3) erlaubt uns nun endlich, die Funktionalgleichung

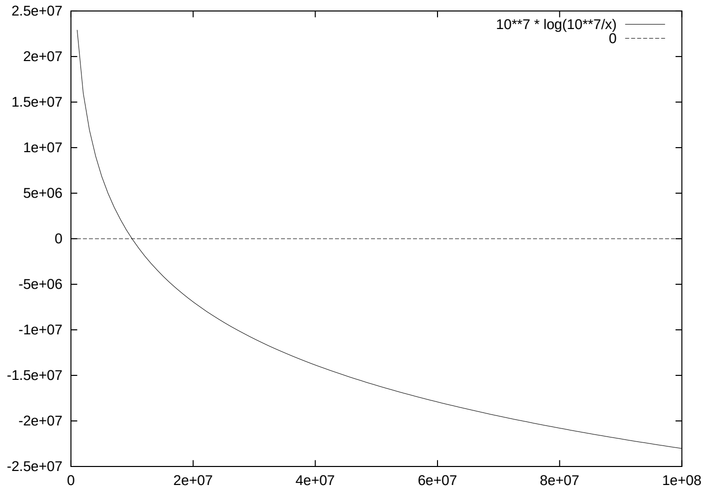


Abbildung 4: Die NapLog-Funktion

des Napierschen Logarithmus zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{NapLog } (x_1 \cdot x_2) &\overset{(3)}{=} 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x_1 \cdot x_2}\right) = 10^7 \left\{\ln 10^7 - \ln(x_1 \cdot x_2)\right\} \\
&= 10^7 \left\{\ln 10^7 - \ln x_1 - \ln x_2\right\} \\
&\overset{ln 10^7 \text{ einschmuggeln}}{=} 10^7 \left\{\ln 10^7 - \ln x_1 - \ln x_2 + \ln 10^7 - \ln 10^7\right\} \\
&= 10^7 \left\{\ln 10^7 - \ln x_1 + \ln 10^7 - \ln x_2 - \ln 10^7\right\} \\
&= 10^7 \left\{\ln\left(\frac{10^7}{x_1}\right) + \ln\left(\frac{10^7}{x_2}\right) - \ln 10^7\right\} \\
&= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x_1}\right) + 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x_2}\right) + 10^7 \ln 10^7 \\
&= 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x_1}\right) + 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{x_2}\right) + 10^7 \ln\left(\frac{10^7}{1}\right) \\
&= \text{NapLog } x_1 + \text{NapLog } x_2 - \text{NapLog } 1.
\end{aligned}$$

Zu allem Überfluß gilt also noch nicht einmal eine 'saubere' Funktionalgleichung, sondern es muß immer noch der Wert NapLog 1 subtrahiert werden.

Aufgabe: Beweise

$$\text{NapLog } x^n = n \cdot \text{ NapLog } x + (1-n) \cdot \text{ NapLog } 1.$$

3 Henry Briggs und der dekadische Logarithmus

Neben Kepler, der die Napierschen Logarithmen sofort nutzte, war auch HENRY BRIGGS (1556-1630) begeistert von der Idee der Logarithmen. Allerdings war auch er mit den Napierschen Logarithmen nicht ganz einverstanden und schlug daher vor, einen Logarithmus so zu konstruieren, daß $\log 1 = 0$ gilt. Dies schlug er während eines Besuches bei John Napier vor und Napier soll sofort zugestimmt haben (vermutlich hatte er die Unzulänglichkeiten seines Napierschen Logarithmus selbst bemerkt). Briggs' Idee ist gestützt durch die konsequente Verwendung der Basis 10:

$$\begin{aligned} 10^0 = 1 &\quad \leftrightarrow \quad \log 1 = 0 \\ 10^1 = 10 &\quad \leftrightarrow \quad \log 10 = 1 \\ 10^2 = 100 &\quad \leftrightarrow \quad \log 100 = 2 \end{aligned}$$

und führt so auf den dekadischen Logarithmus, d.h. $\log = \log_{10}$.

3.1 Die Konstruktionsidee

In Erweiterung der obigen Tabelle kann man schreiben

$$\begin{aligned} 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} &\quad \leftrightarrow \quad \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \\ 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{10}} &\quad \leftrightarrow \quad \log \sqrt{\sqrt{10}} = \frac{1}{4} \\ 10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} &\quad \leftrightarrow \quad \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} = \frac{1}{8} \\ 10^{\frac{1}{16}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} &\quad \leftrightarrow \quad \log \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

und so weiter. Das bringt Briggs auf die Idee, eine Logarithmentabelle auf der Basis fortgesetzten Wurzelziehens zu konstruieren.

Zieht man n mal die Wurzel aus der Zahl 10,

$$\sqrt{\ldots \sqrt{10}},$$

dann ist das gleichbedeutend mit

$$10^{\frac{1}{2^n}}.$$

Für große n ist $10^{\frac{1}{2^n}}$ nahe bei 1, genauer:

$$\lim_{n\to\infty} 10^{\frac{1}{2^n}} = 1.$$

Bei Experimenten (er muß viele Tage und Nächte geschrieben und überlegt haben!) stellt er fest, daß der Logarithmus von $1 + x$ dividiert durch x für kleine x konstant ist. Was heißt das? Er hat vermutlich eine Tabelle wie folgt aufgestellt:

n	$1 + x_n$	$\log(1 + x_n)$	$\frac{\log(1+x_n)}{x_n}$
0	10	1	0.111
1	$\sqrt{10} \approx 3.162278$	$\frac{1}{2}$	0.231
2	$\sqrt{\sqrt{10}} \approx 1.778279$	$\frac{1}{4}$	0.321
3	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}} \approx 1.333521$	$\frac{1}{8}$	0.375
4	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}} \approx 1.154782$	$\frac{1}{16}$	0.404
5	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}} \approx 1.074608$	$\frac{1}{32}$	0.419
6	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}} \approx 1.036633$	$\frac{1}{64}$	0.427
7	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}} \approx 1.018152$	$\frac{1}{128}$	0.430
8	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}}} \approx 1.009035$	$\frac{1}{256}$	0.432
9	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}}}} \approx 1.004507$	$\frac{1}{512}$	0.433
10	$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}}}}}}}} \approx 1.002251$	$\frac{1}{1024}$	0.434

Wir wollen erst später diskutieren, wie Briggs die vielen Wurzeln gezogen hat (ohne Computer!), aber er muß noch viel weiter gerechnet haben (und mit viel mehr Stellen!!), um zu erkennen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = K \tag{4}$$

mit einer Konstanten K ist, für die Briggs

$$K \approx 0.4342944819032518 \tag{5}$$

berechnet. Mein Taschenrechner (TI-Voyage) gibt für $10^{1/2^{45}}$ den Wert 0.434294481903 und steigt für $10^{1/2^{46}}$ mit der Meldung `undef` aus!

Wir wissen heute, daß man Logarithmen zu verschiedenen Basen durch

$$\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x$$

umrechnen kann. Daher kann man $\log(1+x) = \log \mathsf{e} \cdot \ln(1+x)$ schreiben (*log* heißt bei uns immer $\log_{10}$!). Außerdem kennt man eine Reihendarstellung der Funktion $\ln(1+x)$ für $|x| < 1$, nämlich

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots,$$

was Sie mit Hilfe von Taylor-Reihen leicht nachrechnen können. Daher ist

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots$$

und damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Setzen wir unsere Umrechnung ein, dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(1+x)}{\log \mathsf{e}}}{x} = 1$$

und, weil $\log \mathsf{e}$ ja gar nicht von n abhängt,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = \log \mathsf{e}.$$

Also ist die Briggssche Konstante gerade $K = \log \mathsf{e}$, aber das konnte Briggs noch nicht wissen!

Hatte er aber erst einmal den Wert von K auf 16 Stellen genau, dann konnte er dank (4) den Logarithmus von $1+x$ für kleine x berechnen durch

$$\log(1+x) \approx Kx.$$

Damit können wir nun die Konstruktion der Briggsschen Logarithmentafel beschreiben: Briggs braucht eigentlich nur Logarithmen von Primzahlen, da man jede natürliche Zahl über die Primzahlzerlegung darstellen kann, z.B. ist $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ und damit ist $\log 60 = 2\log 2 + \log 3 + \log 5$.

1. Für eine Primzahl p zieht Briggs wiederholt die Wurzel, und zwar so lange, bis er die Wurzel darstellen kann als

   $$p^{\frac{1}{2^n}} = 1 + x$$

   mit einem $x \approx 10^{-16}$.

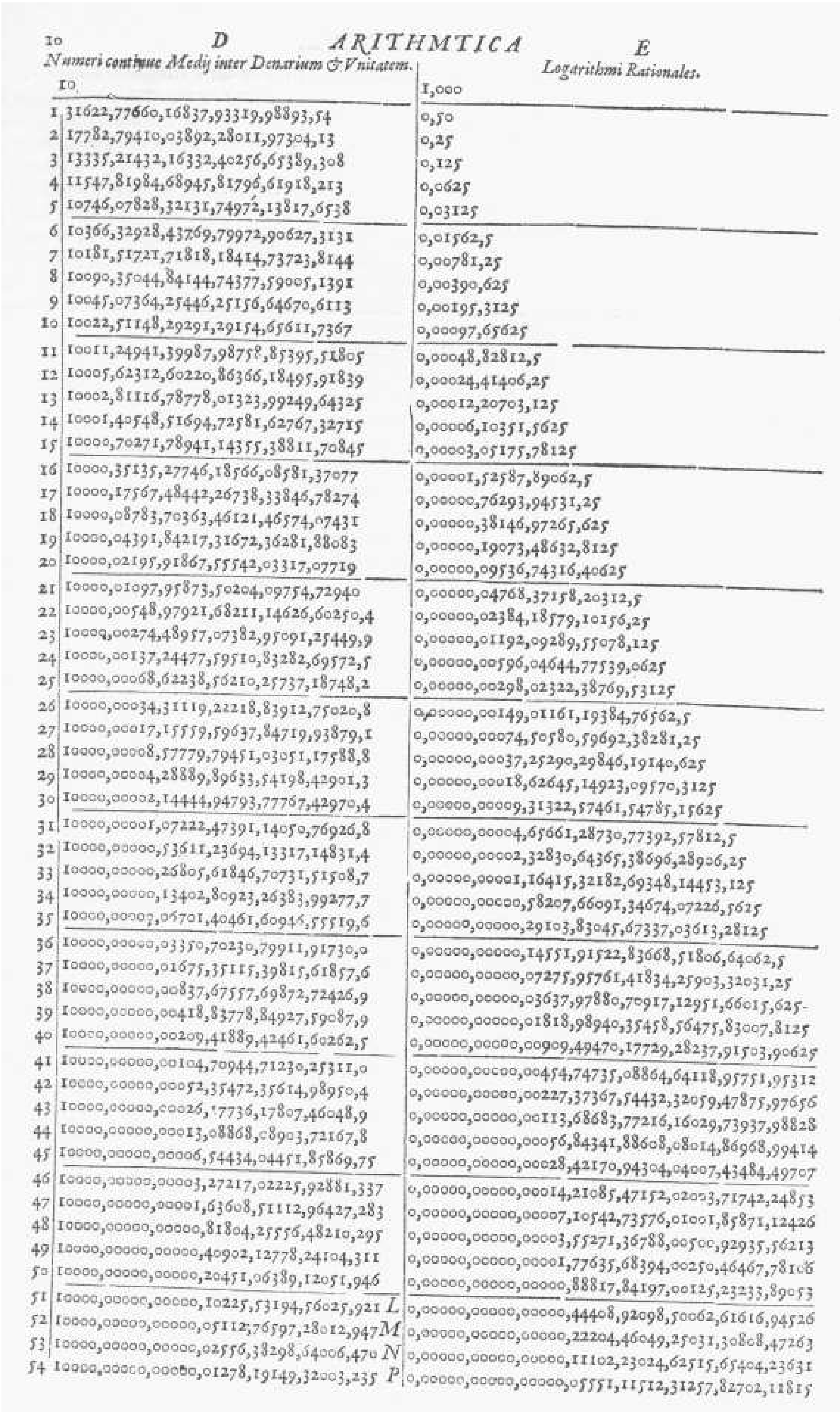
2. Dann folgt

   $$\log\left(p^{\frac{1}{2^n}}\right) = \frac{1}{2^n}\log p = \log(1+x) \approx Kx,$$

   und damit ergibt sich der Logarithmus von p zu

   $$\log p \approx 2^n Kx.$$

In seiner *Arithmetica Logarithmica* findet man diesen Prozeß des fortgesetzten Wurzelziehens direkt in der Logarithmentabelle. In Abbildung 5 ist die erste Seite der Briggsschen Logarithmentafel gezeigt. Sie beginnt mit 10 und dem Logarithmus von 10, nämlich 1. Dann folgt die Wurzel aus 10, deren Logarithmus wegen $10^{1/2}$ gerade $1/2$ ist. Dann kommt die Wurzel aus der Wurzel von 10, was wegen $10^{1/4}$ auf den Logarithmus 0.25 führt, usw.



10 D ARITHMTICA E

	Numeri continue Medij inter Denarium & Vnitatem.	Logarithmi Rationales.
	10	1,000
1	31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
2	17782,79410,03892,28011,97304,13	0,25
3	13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
4	11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
5	10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
6	10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
7	10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
8	10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
9	10045,07364,25446,25156,64670,6113	0,00195,3125
10	10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
11	10011,24941,39987,98758,85395,51805	0,00048,82812,5
12	10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25
13	10002,81116,78778,01323,99249,64325	0,00012,20703,125
14	10001,40548,51694,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
15	10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
16	10000,35135,27746,18566,08581,37077	0,00001,52587,89062,5
17	10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
18	10000,08783,70363,46121,46574,07431	0,00000,38146,97265,625
19	10000,04391,84217,31672,36281,88083	0,00000,19073,48632,8125
20	10000,02195,91867,55542,03317,07719	0,00000,09536,74316,40625
21	10000,01097,95873,50204,09754,72940	0,00000,04768,37158,20312,5
22	10000,00548,97921,68211,14626,60250,4	0,00000,02384,18579,10156,25
23	10000,00274,48957,07382,95091,25449,9	0,00000,01192,09289,55078,125
24	10000,00137,24477,59510,83282,69572,5	0,00000,00596,04644,77539,0625
25	10000,00068,62238,56210,25737,18748,2	0,00000,00298,02322,38769,53125
26	10000,00034,31119,22218,83912,75020,8	0,00000,00149,01161,19384,76562,5
27	10000,00017,15559,59637,84719,93879,1	0,00000,00074,50580,59692,38281,25
28	10000,00008,57779,79451,03051,17588,8	0,00000,00037,25290,29846,19140,625
29	10000,00004,28889,89633,54198,42901,3	0,00000,00018,62645,14923,09570,3125
30	10000,00002,14444,94793,77767,42970,4	0,00000,00009,31322,57461,54785,15625
31	10000,00001,07222,47391,14050,76926,8	0,00000,00004,65661,28730,77392,57812,5
32	10000,00000,53611,23694,13317,14831,4	0,00000,00002,32830,64365,38696,28906,25
33	10000,00000,26805,61846,70731,51508,7	0,00000,00001,16415,32182,69348,14453,125
34	10000,00000,13402,80923,26383,99277,7	0,00000,00000,58207,66091,34674,07226,5625
35	10000,00000,06701,40461,60946,55519,6	0,00000,00000,29103,83045,67337,03613,28125
36	10000,00000,03350,70230,79911,91730,0	0,00000,00000,14551,91522,83668,51806,64062,5
37	10000,00000,01675,35115,39815,61857,6	0,00000,00000,07275,95761,41834,25903,32031,25
38	10000,00000,00837,67557,69872,72426,9	0,00000,00000,03637,97880,70917,12951,66015,625
39	10000,00000,00418,83778,84927,59087,9	0,00000,00000,01818,98940,35458,56475,83007,8125
40	10000,00000,00209,41889,42461,60262,5	0,00000,00000,00909,49470,17729,28237,91503,90625
41	10000,00000,00104,70944,71230,25311,0	0,00000,00000,00454,74735,08864,64118,95751,95312
42	10000,00000,00052,35472,35614,98950,4	0,00000,00000,00227,37367,54432,32059,47875,97656
43	10000,00000,00026,17736,17807,46048,9	0,00000,00000,00113,68683,77216,16029,73937,98828
44	10000,00000,00013,08868,08903,72167,8	0,00000,00000,00056,84341,88608,08014,86968,99414
45	10000,00000,00006,54434,04451,85869,75	0,00000,00000,00028,42170,94304,04007,43484,49707
46	10000,00000,00003,27217,02225,92881,337	0,00000,00000,00014,21085,47152,02003,71742,24853
47	10000,00000,00001,63608,51112,96427,283	0,00000,00000,00007,10542,73576,01001,85871,12426
48	10000,00000,00000,81804,25556,48210,295	0,00000,00000,00003,55271,36788,00500,92935,56213
49	10000,00000,00000,40902,12778,24104,311	0,00000,00000,00001,77635,68394,00250,46467,78106
50	10000,00000,00000,20451,06389,12051,946	0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,23233,89053
51	10000,00000,00000,10225,53194,56025,921 L	0,00000,00000,00000,44408,92098,50062,61616,94526
52	10000,00000,00000,05112,76597,28012,947 M	0,00000,00000,00000,22204,46049,25031,30808,47263
53	10000,00000,00000,02556,38298,64006,470 N	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631
54	10000,00000,00000,01278,19149,32003,235 P	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

Abbildung 5: Die erste Seite der Briggsschen Logarithmentafel

Man kann nun nachrechnen, daß Briggs die Quadratwurzel etwa fünfzig (!) mal gezogen haben muß, um die obige Konstruktion zu ermöglichen! Wie hat er dieses Wurzelziehen durchgeführt? Ganz sicher *nicht* mit einem iterativen Verfahren wie etwa dem Heron-Verfahren, denn dann wäre er heute noch nicht fertig mit seiner Logarithmentabelle! Bei der Beantwortung der Frage nach dem Wurzelziehen erweist sich Henry Briggs als wahrer mathematischer Genius!

3.2 Das wiederholte Wurzelziehen

Henry Briggs ist der Erfinder der Differenzenrechnung. Der Flaschenhals seines Algorithmus' ist ganz sicher das wiederholte Wurzelziehen und er muß lange und intensiv darüber nachgedacht haben, wie er diesen Schritt ökonomisch ausführen konnte. Bei seinen Experimenten hat er irgendwann mühsam per Hand (wahrscheinlich mit einem direkten händischen Verfahren) die ersten sechs oder sieben Wurzeln gezogen, etwa so wie in Tabelle 1 für $p = 3$, aber er hat 30 Dezimalstellen berechnet: Briggs muß gewußt haben, daß er auf

$$\begin{array}{rcl}
3^1 & = & 3.000000000 \\
\sqrt{3} = 3^{1/2} & \approx & 1.732050808 \\
\sqrt{\sqrt{3}} = 3^{1/4} & \approx & 1.316074013 \\
\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = 3^{1/8} & \approx & 1.147202690 \\
\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}} = 3^{1/16} & \approx & 1.071075483 \\
\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}} = 3^{1/32} & \approx & 1.034927767 \\
3^{1/64} & \approx & 1.017313996 \\
3^{1/128} & \approx & 1.008619847
\end{array}$$

Tabelle 1: **Die ersten sieben Wurzeln von 3**

diese Weise in seinem Leben keine auch nur annähernd ausreichende Logarithmentafel zuwege gebracht hätte, denn immerhin war er weit jenseits der 50, als er erstmals mit den Logarithmen in Kontakt kam! Nun zeigt er aber eine Meisterschaft, die vielen brillianten Mathematikern eigen ist: **er sieht in der Tabelle 1 ein Muster!** Schenken wir der Stelle *vor* dem Komma keine Bedeutung, denn bei Logarithmen kommt es ja gar nicht auf Stellen an. Es ist ja $\log_{10} 5.1 = \log_{10} \frac{51}{10} = \log_{10} 51 - \log_{10} 10 = \log_{10} 51 - 1$ und beim Rechenschieber macht sich diese Eigenschaft schließlich dadurch bemerkbar, daß man sich über die Kommastelle seines Ergebnisses zusätzliche Gedanken machen muß.

Ohne Vorkommastellen erhalten wir aus Tabelle 1 die Tabelle 2. In der zweiten Spalte bemerkt Briggs, daß jeder Eintrag ungefähr die Hälfte des vorhergehenden Eintrages ist. Das ist noch schlecht sichtbar im zweiten Eintrag, denn (0.)732050808 ist deutlich mehr als die Hälfte der vorhergehenden Ziffernfolge (1.)000000000, aber schon etwas tiefer ist die Übereinstimmung weit besser! Um zu notieren, wie gut seine Idee der Halbierung wirklich ist, erfindet Briggs die **erste Briggssche Differenz**

$$B_1^n := \frac{1}{2} Z(n) - Z(n+1).$$

n	Wurzeln	$Z(n)$
0	3^1	0000000000
1	$3^{1/2}$	732050808
2	$3^{1/4}$	316074013
3	$3^{1/8}$	147202690
4	$3^{1/16}$	71075483
5	$3^{1/32}$	34927767
6	$3^{1/64}$	17313996
7	$3^{1/128}$	8619847

Tabelle 2: **Die ersten sieben Wurzeln von 3 ohne Vorkommastelle**

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} B_1^0 &= \frac{1}{2}Z(0) - Z(1) = 0000000000 - 732050808 = 267949192 \\ B_1^1 &= \frac{1}{2}Z(1) - Z(2) = \frac{1}{2}732050808 - 316074013 = 49951391 \\ \vdots & \quad \vdots \quad \vdots, \end{aligned}$$

was wir in Tabelle 3 notieren wollen. Ein Blick in die Spalte der ersten Briggs-

n	$Z(n)$	B_1
0	0000000000	
		267949192
1	732050808	
		49951391
2	316074013	
		10834317
3	147202690	
		2525862
4	71075483	
		609975
5	34927767	
		149888
6	17313996	
		37151
7	8619847	

Tabelle 3: **Die ersten Briggsschen Differenzen**

schen Differenzen in Tabelle 3 zeigt Briggs, daß hier jeder Eintrag etwa ein Viertel des vorhergehenden ist! Um die Güte dieser Idee zu dokumentieren, bildet er die **zweite Briggssche Differenz**

$$B_2^j := \frac{1}{4}B_1^j - B_1^{j+1},$$

die wir in Tabelle 4 notieren. Dabei ist $j = 0, 1, 2, \dots$ eine durchgehende Nummerierung in der Spalte der Differenzen. Nun ist klar, wie es weitergeht! Die

n	$Z(n)$	B_1	B_2
0	0000000000		
		267949192	
1	732050808		17035907
		49951391	
2	316074013		1653531
		10834317	
3	147202690		182717
		2525862	
4	71075483		21491
		609975	
5	34927767		2606
		149888	
6	17313996		321
		37151	
7	8619847		

Tabelle 4: **Die ersten und zweiten Briggsschen Differenzen**

zweiten Briggschen Differenzen achteln sich offenbar und geben Anlaß zur Definition der **dritten Briggschen Differenz**

$$B_3^j := \frac{1}{8}B_2^j - B_2^{j+1},$$

wie in Tabelle 5. Eine weitere Differenz wollen wir uns noch gönnen, nämlich

n	$Z(n)$	B_1	B_2	B_3
0	0000000000			
		267949192		
1	732050808		17035907	
		49951391		475957
2	316074013		1653531	
		10834317		23974
3	147202690		182717	
		2525862		1349
4	71075483		21491	
		609975		80
5	34927767		2606	
		149888		5
6	17313996		321	
		37151		
7	8619847			

Tabelle 5: **Die ersten, zweiten und dritten Briggsschen Differenzen**

die **vierte Briggssche Differenz**

$$B_4^j := \frac{1}{16}B_3^j - B_3^{j+1}.$$

Das ergibt Tabelle 6 und damit ist Henry Briggs am Ziel! Die Geburtsstunde der Differenzenrechnung wird markiert durch die in der letzten Spalte mit einem Kästchen umrahmte Null! Alle weiteren Einträge in dieser Spalte werden Null

n	$Z(n)$	B_1	B_2	B_3	B_4
0	0000000000				
		267949192			
1	732050808		17035907		
		49951391		475957	
2	316074013		1653531		5773
		10834317		23974	
3	147202690		182717		149
		2525862		1349	
4	71075483		21491		4
		609975		80	
5	34927767		2606		$\boxed{\mathbf{0}}$
		149888		5	
6	17313996		321		
		37151			
7	8619847				

Tabelle 6: **Die ersten, zweiten, dritten und vierten Briggsschen Differenzen**

sein, denn die Zahlen nehmen offenbar von oben nach unten ab. Also wird auch

$$B_4^4 = B_4^5 = 0$$

sein. Um die Bezeichnungen noch einmal ganz klarzustellen, sind die Differenzen in Tabelle 7 explizit bezeichnet worden. Im Fettdruck sehen wir Differenzen, die bisher nicht berechnet werden konnten, denn dazu hätten wir noch weitere Wurzeln ziehen müssen. **Nun sind wir aber in der Lage, die Logarithmentabelle von hinten nach vorne aufzufüllen, ohne jemals wieder eine Wurzel explizit ziehen zu müssen!**

In der Spalte der dritten Differenzen ist der Eintrag B_3^5 unbekannt, aber wir wissen ja, daß

$$B_4^4 = \frac{1}{2^4} B_3^4 - B_3^5$$

gelten muß. Daraus können wir aber B_3^5 berechnen, nämlich durch

$$B_3^5 = \frac{1}{2^3} B_3^4 - B_4^4 = \frac{1}{8} 5 - 0 = 0,$$

denn $5/16$ unterschreitet unsere darstellbare Genauigkeit (wir unterschreiten die Ziffer 1). Schauen wir noch eine Spalte nach vorne. Die Differenz B_2^6 ist noch unbekannt, wir wissen aber, daß

$$B_3^5 = \frac{1}{2^3} B_2^5 - B_2^6$$

gelten muß. Also läßt sich B_2^6 berechnen aus

$$B_2^6 = \frac{1}{2^3} B_2^5 - B_3^5 = \frac{1}{8} 321 - 0 = 40,$$

wobei die 'Nachkommastellen' $8321/8 = 40.125$ aus unserer Genauigkeit herausfallen. Nun ist aber auch B_1^7 berechenbar, denn aus

$$B_2^6 = \frac{1}{2^2} B_1^6 - B_1^7$$

n	$Z(n)$	B_1	B_2	B_3	B_4
0	0000000000				
		$267949192 = B_1^0$			
1	732050808		$17035907 = B_2^0$		
		$49951391 = B_1^1$		$475957 = B_3^0$	
2	316074013		$1653531 = B_2^1$		$5773 = B_4^0$
		$10834317 = B_1^2$		$23974 = B_3^1$	
3	147202690		$182717 = B_2^2$		$149 = B_4^1$
		$2525862 = B_1^3$		$1349 = B_3^2$	
4	71075483		$21491 = B_2^3$		$4 = B_4^2$
		$609975 = B_1^4$		$80 = B_3^3$	
5	34927767		$2606 = B_2^4$		$\boxed{0 = B_4^3}$
		$149888 = B_1^5$		$5 = B_3^4$	
6	17313996		$321 = B_2^5$		$\mathbf{0 = B_4^4}$
		$37151 = B_1^6$		$\mathbf{B_3^5}$	
7	8619847		$\mathbf{B_2^6}$		$\mathbf{0 = B_4^5}$
		$\mathbf{B_1^7}$		$\mathbf{B_3^6}$	
8	$\mathbf{Z(8)}$		$\mathbf{B_2^7}$		
		$\mathbf{B_1^8}$			
9	$\mathbf{Z(9)}$				

Tabelle 7: **Die Briggsschen Differenzen**

folgt

$$B_1^7 = \frac{1}{2^2} B_1^6 - B_2^6 = \frac{1}{4} 37151 - 40 = 9248,$$

denn $\frac{1}{4}37151 - 40 = 9248 = 9247.75$ und das ist in unserem Ziffernsystem gerade 9248. Damit sind wir nun in der Spalte für Z angekommen und können $Z(8)$ aus

$$B_1^7 = \frac{1}{2} Z(7) - Z(8)$$

berechnen zu

$$Z(8) = \frac{1}{2} Z(7) - B_1^7 = \frac{1}{2} 8619847 - 9248 = 4300676,$$

denn $\frac{1}{2}8619847 - 9248 = 4300675.5$. Damit haben wir die Tabelle 8 erhalten. Die kursiv gedruckten Einträge sind genau diejenigen, die wir aus $B_4^4 = 0$ zurückgerechnet haben. Nun nimmt man sich den Eintrag $B_4^5 = 0$ vor und rechnet von dort zurückt bis man $Z(9)$ bestimmt hat, und so weiter und so weiter. Für jede Primzahl mußte Henry Briggs also nur wenige Wurzeln per Hand ziehen, alle weiteren hat er durch die von ihm entdeckte geniale Technik der Differenzenrechnung bestimmen können.

4 Zusammenfassung

Ich habe versucht, den ungeheuren Aufwand zur händischen Berechnung einer Logarithmentafel an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert darzustellen. Nur der Genialität eines Henry Briggs ist es zu verdanken, daß Leute wie Adrian Vlacq und andere große Tabellen zur Verfügung stellen konnten, die das Rechnen so sehr erleichterten.

n	$Z(n)$	B_1	B_2	B_3	B_4
0	0000000000				
		$267949192 = B_1^0$			
1	732050808		$17035907 = B_2^0$		
		$49951391 = B_1^1$		$475957 = B_3^0$	
2	316074013		$1653531 = B_2^1$		$5773 = B_4^0$
		$10834317 = B_1^2$		$23974 = B_3^1$	
3	147202690		$182717 = B_2^2$		$149 = B_4^1$
		$2525862 = B_1^3$		$1349 = B_3^2$	
4	71075483		$21491 = B_2^3$		$4 = B_4^2$
		$609975 = B_1^4$		$80 = B_3^3$	
5	34927767		$2606 = B_2^4$		$0 = B_4^3$
		$149888 = B_1^5$		$5 = B_3^4$	
6	17313996		$321 = B_2^5$		$0 = B_4^4$
		$37151 = B_1^6$		$0 = B_3^5$	
7	8619847		$40 = B_2^6$		$\mathbf{0 = B_4^5}$
		$9241 = B_1^7$		$\mathbf{B_3^6}$	
8	4300676		$\mathbf{B_2^7}$		
		$\mathbf{B_1^8}$			
9	$\mathbf{Z(9)}$				

Tabelle 8: **Zur Rückwärtsberechnung der Wurzeln aus den Briggsschen Differenzen**

Nicht erwähnt habe ich BÜRGI und seine 'schwarzen' und 'roten' Zahlen. Seine Entdeckungen stehen nur ganz am Anfang der Gedankenwelt von Napier und Briggs, haben auch nicht die mathematische Welt so bedeutend verändert wie die Briggsschen Logarithmen und sollten daher an anderem Orte diskutiert werden.

Literatur

[1] OTTO TOEPLITZ — Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. *Springer Verlag, 1949*

[2] GEORGE M. PHILLIPS — Two Millenia of Mathematics: From Archimedes to Gauss. *Springer Verlag, 2000*

[3] C.H. EDWARDS, JR. — The Historical Development of the Calculus. *Springer Verlag, 1979*

[4] HERMAN H. GOLDSTINE — A History of Numerical Analysis: From the 16th Through the 19th Century. *Springer Verlag, 1977*

[5] HENRY BRIGGS — Arithmetica Logarithmica. *Georg Olms Verlag, 1976*

[6] JOHN NAPIER — The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms. *Reprint, Dawsons of Pall Mall, 1966*