Rechnen mit Tönen -
zur Bedeutung des Logarithmus in der Musik

Bei meinen Vorbereitungen zu diesem Aufsatz haben sich verschiedene Blickwinkel – physikalisch; mathematisch, musiktheoretisch, psychophysikalisch - ergeben, unter denen man das Thema "Rechnen mit Tönen" angehen konnte. Insofern erlaube ich mir, einige kurzgehaltene, aber hoffentlich ausreichend ausführliche, Hintergrundinformationen zu diesem Themenbereich zu geben. Dies erfolgt mit dem Ziel, zu gut verständlichen Ausführungen über die Zusammenhänge von Rechnen mit und Berechnen von Tönen zu gelangen.

Angeregt durch einen "Rechenschieber für Orgelpfeifen (System Rensch)" - den ich bei einer Versteigerung leider nicht ersteigern konnte - und ermuntert durch einen Sammlerkollegen, habe ich mich mit den Zusammenhängen zwischen dem Rechnen und den Tönen näher beschäftigt. Im wesentlichen ist dazu in der Literatur bereits alles gesagt bzw. geschrieben worden, allerdings sind die Quellen nicht jedermann immer leicht zugänglich. In den folgenden Ausführungen möchte ich das, was ich durch das Literaturstudium aufgenommen habe, in geraffter und übersichtlicher Weise wiedergeben. Alle verwendeten Monographien sind im Literaturverzeichnis aufgeführt und liegen mir vor. Selbstverständlich stellen auch die Ergebnisse von Recherchen im Internet eine Basis für diese kleine Übersicht dar. Zuerst war die Ergebnisausbeute noch mager, wurde aber im Verlaufe wachsender Vertrautheit mit der Thematik sehr, sehr umfangreich (über 4500 Stellen), so dass ich schliesslich darauf achten musste, den Wald vor lauter Bäumen nicht aus den Augen zu verlieren.

Es wird immer wieder davon gesprochen, dass musikalische Menschen auch ein gutes mathematisches Verständnis besitzen. Dieser Verknüpfung nachzugehen, ist nicht das Ziel dieser Ausführungen. Sie sollen lediglich einige vielleicht in Vergessenheit geratene Zusammenhänge wieder beleben oder neu erleben lassen. Selbstverständlich wäre das Thema nicht so interessant für mich gewesen, wenn nicht auch der Logarithmus eine wesentliche Rolle in der Musik spielen würde.

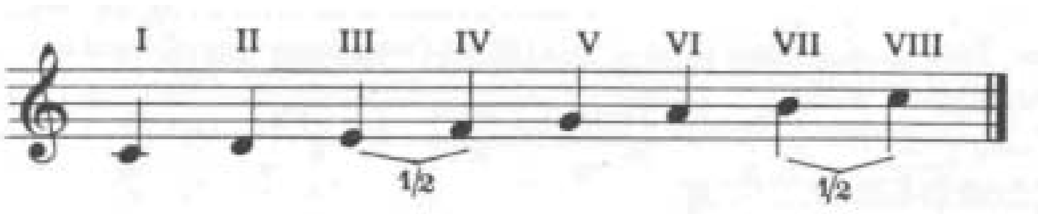
In diesem Aufsatz wird folgenden Fragestellungen nachgegangen:

1. Wie baut sich eine Tonleiter auf ? Wie hat man sich deren Aufbau vorzustellen ?
2. Welchen Beitrag hat Pythagoras vor ca. 2500 Jahren geleistet ?
3. Wie hat das Monochord Hilfestellung geleistet ?
4. Wie unterscheiden sich die reine und die temperierte Stimmung ?
5. Welche Bedeutung hat das pythagoreische Komma ?
6. Gibt es Rechenaufgaben zur Musik ?
7. Was ist unter dem Quintenzirkel zu verstehen?
8. Wie fügen sich die dyadischen Logarithmen in die Musik ein ?
9. Welchen Vorteil bietet die Cent-Betrachtung ?
10. Was sagt das Weber-Fechnersche Gesetz aus ?
11. Wie ergeben sich die Tonlogarithmen ?
12. Warum sind die Tasten eines Keybords
    mit einem Rechenschieber vergleichbar ?
13. Warum und wie verjüngen sich bei einer Gitarre die Abstände der Bünde zu den höheren Tönen hin ?
14. Wie hängen die Normzahlen mit den Schwingungsverhältnissen der Töne zusammen ?

Gliederung

1. Einleitung

Zur Einleitung werden die Leser mit ein paar Begriffen aus der Harmonielehre vertraut gemacht. Beginnen wir mit dem Beispiel einer C-Dur Tonleiter:



Die römischen Ziffern deuten auf die Position, die Reihenfolge, der Töne hin. An den Stellen mit der Klammer unter den Noten, befinden sich die sogenannten Halbtonsprünge, also zwischen Ton III und IV sowie zwischen Ton VII und VIII. Die anderen Tonsprünge sind Ganztonsprünge. Teilt man die Tonleiter in der Mitte in jeweils 4 Töne auf, so befinden sich die Halbtonsprünge dieser beiden 4er-Tonleitern jeweils zwischen den letzten beiden Tönen. Die Position der Halbsprünge zwischen dem Ton III und IV sowie dem Ton VII und VIII ist typisch für ALLE Dur-Tonarten. Sofern sich Tonleitern in der beschriebenen Weise aus 5 Ganzton-schritten und 2 Halbtonschritten zusammensetzen, spricht man von **diatonischen** Tonleitern.

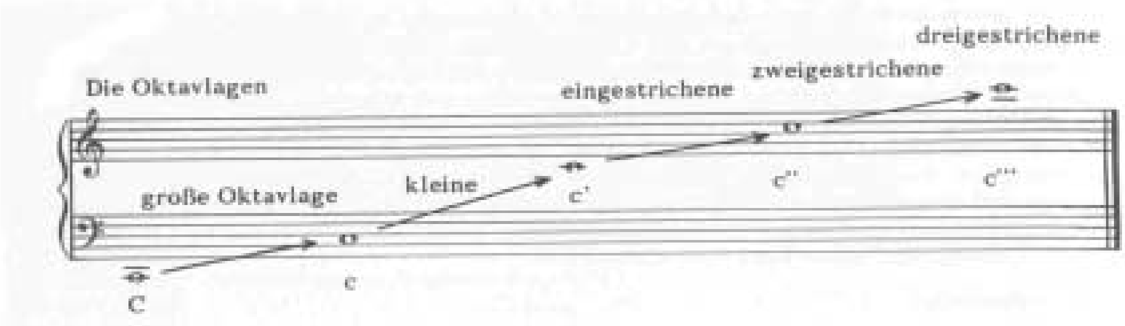
Alle Töne haben eine typische Buchstaben-Bezeichnung, die sich länderspezifisch unterscheiden:

	Deutsche Bezeichnung	Französische Bezeichnung nach Solfege (eingedeutscht)	Amerikanische Bezeichnung		Amerikanisch beim Ton **A** beginnend
Ton I (auf der unteren Hilfslinie)	C	Do	C		Ergibt sich aus alphabetischer Reihenfolge: A
Ton II	D	Re	D		B
Ton III	E	Mi	E		C
Ton IV	F	Fa	F		D
Ton V	G	Sol (So)	G		E
Ton VI	A	La	A		F
Ton VII	H	Si (Ti)	**B**		G
Ton VIII	C	Do	C		A

"Unserem" Ton "H" entspricht also im amerikanischen System dem Ton "B". Ein "H" gibt es dort nicht.

Glücklicherweise muss sich die Musik nicht auf diese acht Töne der C-Dur-Tonleiter beschränken. Die meisten Musikinstrumente haben einen erheblich größeren Tonumfang anzubieten, die der Mensch auch hören und geniessen kann. Damit sich Komponisten und Musiker beim Aufschreiben all dieser verschiedenen Noten nicht mit zu vielen Hilfslinien zu den standardisierten 5 Linien herumquälen müssen, gibt es zusätzlich zu dem oben dargestellten **Violinschlüssel** weitere Notenschlüssel, die einer Notenzeile oder Tonfolge vorangestellt werden wie z.B. den **Baßschlüssel** für sehr tiefe Töne, den **Tenorschlüssel** für nicht so tiefe Töne, etc. Da die Notennamen sich alle 8 Töne - also einem Intervall von einer Oktave - wiederholen, werden sie zur eindeutigeren Identifizierung in unterschiedlichen Schreibweisen dargestellt, um ihre Tonhöhe zu charakterisieren.

Dazu ein Beispiel aus der Harmonielehre von Frank Haunschild: " ....Zur besseren Unterscheidung dieser Töne gleichen Namens, die eine oder mehrere Oktaven auseinanderliegen, hat man den **Oktavlagen** verschiedene Namen gegeben. Die Kontra-Oktavlage beginnt mit C" (Großes C zweigestrichen). Es folgt die große Oktavlage, die mit dem Grundton unserer Teiltonreihe (C) beginnt. Daran schliessen sich dann die kleine



Oktavlage (c = kleines c), die eingestrichene (c'), die zweigestrichene (c") und die dreigestrichene Oktavlage (c"') *(siehe Beispiel).* Die große und kleine Oktavlage liegen im Bereich des Baßschlüssels, während die ein- und zweigestrichenen Oktavlagen im Violinschlüssel notiert werden." Die Unterscheidung zwischen Groß- und Kleinbuchstaben ist hier wichtig!

Insofern hätten die Töne der C-Dur-Tonleiter exakterweise mit c', d', e', etc. gekennzeichnet werden müssen. Dies kann man sich sparen, wenn die Noten abgebildet sind, da ihre relative Tonhöhe damit festgelegt ist.

Entsprechend den Tonbezeichnungen mit den römischen Ziffern lassen sich die Töne auch mit lateinischen Namen – unabhängig von der Tonart - benennen:

Ton I	Primus, der erste Ton
Ton II	Secundus, der zweite Ton
Ton III	Tertius, der dritte Ton
Ton IV	Quartus, der vierte Ton
Ton V	Quintus, der fünfte Ton
Ton VI	Sextus, der sechste Ton
Ton VII	Septimus, der siebte Ton
Ton VIII	Octavus, der achte Ton

Diese Bezeichnungen sind wichtig, weil sie gleichzeitig auch die Namensgeber für die Abstände zwischen zwei Tönen darstellen. Wir hatten hierzu bereits die Oktave, also den 8-Tonabstand, kennengelernt. Der erste und der letzte Ton werden immer mitgezählt. Dementsprechend handelt es sich um eine Quinte, wenn der Abstand 5 Töne beträgt. Bei einem Abstand von 4 Tönen spricht man von einer Quarte. Diese Tonabstände werden in der Fachsprache als **Intervalle** bezeichnet Die anderen Intervalle heissen Prime, Sekunde, Terz, Sexte und Septime.

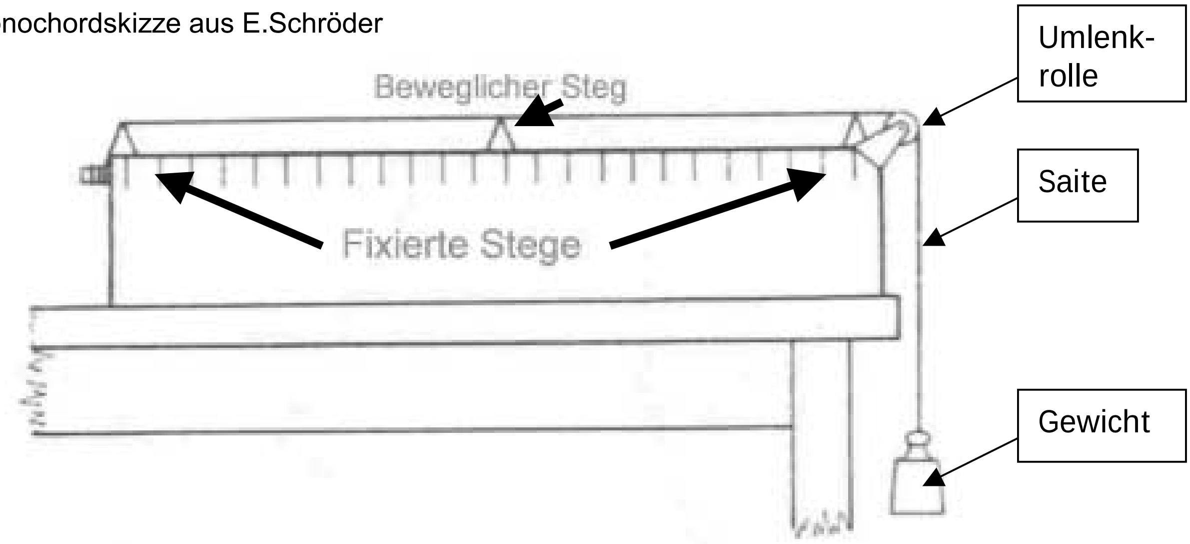
Soweit überliefert hat hat sich Pythagoras als wahrscheinlich der erste Mensch vor mehr als 2000 Jahren mit den Phänomenen der Intervalle und deren Bildung in systematisch experimenteller und damit wissenschaftlicher Weise auseinandergesetzt.

2. Pythagoras

2.1. Monochord

Als einer der ersten Wissenschaftler überhaupt hat sich Pythagoras eines Gerätes zum Studium der Töne bedient. Bei diesem "Gerät" war über einen quaderförmigen Hohl-(Resonanz-)körper über die gesamte Länge eine einzige Saite mit Hilfe eines Gewichtes oder einer Schraube gespannt. Durch die Veränderung der Spannung konnte die Tonhöhe verändert werden. Die Saite lag an beiden Enden jeweils auf Stegen auf und wurde so hoch über dem Hohlkörper gehalten, dass sich ein weiterer Steg dazwischen schieben liess.

Monochordskizze aus E.Schröder

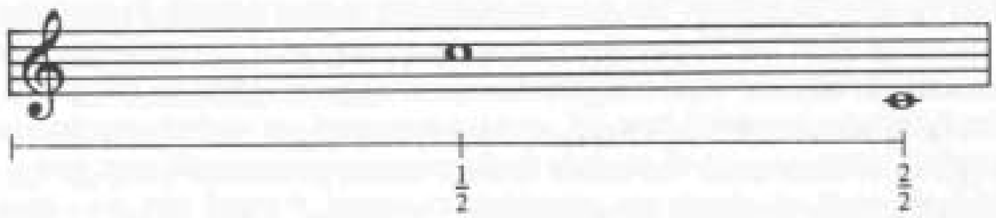


Beim Anzupfen der ganzen freien Saite - ohne den beweglichen Steg – übertragen sich die Schwingungen auf den Hohlkörper und man hört den Grundton der Saite, der durch eine bestimmte (Schwingungs-) Frequenz charakterisiert ist. Dem Ton I, dem c' unserer oben dargestellten C-Dur Tonleiter kann z.B. die Frequenz von 256 Herz gegeben werden. Die Einheit Herz gibt die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde an.

Bringt man den beweglichen Steg an die in der Abbildung dargestellte Position, also genau in die Mitte der Saite, so erlebt man beim Anzupfen der Saite einen ganz neuen Ton, gleichgültig auf welcher Seite des Steges man die Saite anzupft ! Der Ton ist zwar wieder ein C, diesmal aber das c'', also das um genau eine Oktave höhere C des Grundtones c'.

Martin Vogel stellt das in seinen "Tonbeziehungen" Seite 12 ff. ausgehend vom Grundton c' so dar:

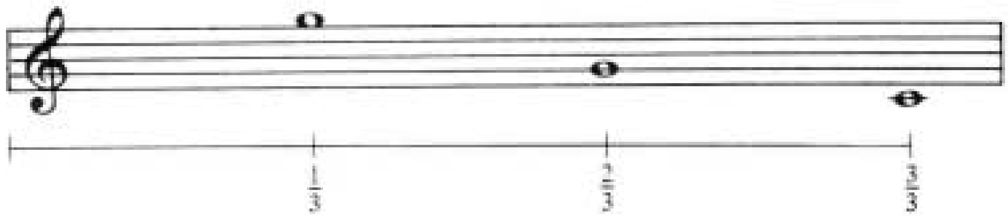
2-Teilung:



c''   c'

Bei der äquidistanten Einteilung der Monochord-Saite in Drittel ergibt sich folgendes Bild:

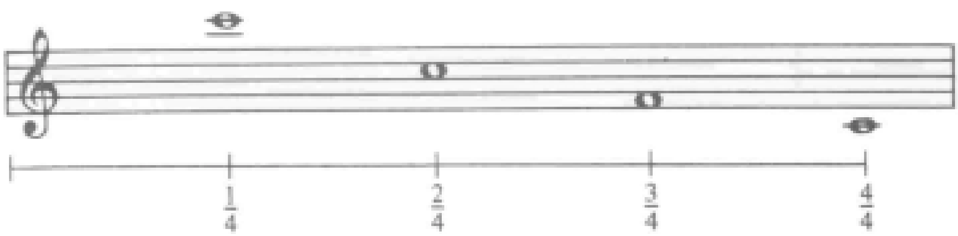
3-Teilung:



Als Töne resultieren aus dieser 3er-Teilung das g' und das g'', also eine Quinte zum Grundton und eine Oktave. Selbstverständlich wird hier nur mit einem Steg (Reiter) gearbeitet, der – wenn er 2/3 der Saite frei schwingen lässt - das g' erklingen lässt, der im Abstand einer Quinte vom Grundton c' liegt. Bringt man die andere Seite des Stegs (Reiters) – also das freie eine Drittel – zum Schwingen, so ertönt das g'', das um eine Oktave höhere g. Anders ausgedrückt: wir wissen, dass 1/3 die Hälfte von 2/3 ist und bei einer Halbierung einer Saitenlänge die Oktave des Grundtones erklingt, hier also das g'.

Gleichermaßen stellt sich die Situation bei der äquidistanten 4er-Teilung dar. Bei einem freischwingenden Anteil von ¾ der Seite des Grundtones c' ertönt das f', das eine Quart vom Grundton entfernt ist. Die anderen Töne sind wieder c's, allerdings die um eine (bei 2/4 = ½) bzw. zwei (bei ½ x ½ = ¼) Oktaven höheren.

4-Teilung:



An dieser Stelle sei auf einige Begriffe eingegangen, die wir zum weiteren Verständnis benötigen: Mit der **Schwingungzahl** wird die Anzahl der Schwingungen einer Saite in einer beliebigen Zeit ausgedrückt. Bezieht man die Schwingungszahl auf eine Sekunde, so erhält man die **Frequenz** mit der Einheit Hertz (Hz).

Bezogen auf die Töne des Monochord haben die Pythagoräer festgestellt:

Die schwingenden Saitenabschnitte verhalten sich umgekehrt proportional zu den Frequenzen (oder den Schwingungzahlen) der entstehenden Töne.

So gelangt man zu einer Oktave durch Halbieren der Saite, allerdings ist die Frequenz bzw. die **Schwingungszahl** des Oktav-Tones doppelt so hoch wie die des Grundtones, die halbierte Saite schwingt also doppelt so schnell wie die ganze.

Bei der Quarte ist die Frequenz um 4/3 erhöht und bei der Quinte um 3/2, was den Kehrwerten (umgekehrt proportional) der Saitenteilungen von ¾ und von 2/3 entspricht. Die Schwingungszahlen der Intervalle verhalten sich wie 4/3 : 1 (ganze Saitenlänge) für die Quarte bzw. 3/2 : 1 für die Quinte. Deren **Verhältniszahlen** lauten daher: 4/3; 3/2.

Wie kommt es nun zur pythagoreischen Tonleiter ?

Bei ihren Versuchen haben Pythagoras und seine Schüler selbstverständlich mit mehreren Monochords arbeiten können. So konnten sie unter anderem durch das Zupfen der einzelnen Saiten zweier gleichgestimmter Monochords Zweiklänge - das gleichzeitige Erklingen zweier Töne - hervorrufen, die sie als angenehm empfanden während andere ihnen nicht so behagten ("dissonant" waren). Ihnen fiel auf, dass besonders die Zweiklänge gut ("konsonant") klangen, die sich aus den Tönen der oben beschriebenen Teilungen ergaben wie die Terzen, Quarten und Quinten. Spielte man nach einer Quinte die darauffolgende Quarte, so ergab sich als Endton die Oktave des Grundtones, z.B. die Quinte c' – g' plus die Quarte von g' ausgehend ergab c''.

Addierten sie Intervalle durch das Hintereinanderspielen von Tönen, so gelangten sie zu den Endtönen durch die **Multiplikation der Verhältniszahlen** der einzelnen Intervalle:

Quinte + Quarte = 3/2 x 4/3 = 12/6 = 2/1 = Oktave.

Auf dem gleichen Prinzip basierend ermittelten sie die Verhältniszahl der Sekunde, sie ist nämlich die **Differenz aus Quinte und Quarte** und ergibt sich als **Quotient der entsprechenden Verhältniszahlen**:

Quinte – Quarte = 3/2 : 4/3 = 3/2 x ¾ = 9/8.

Mit diesen Berechnungen können wir bereits eine **"Tonleiter"** erstellen
(nach E. Schröder):

Tonbezeichnung	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C'**
Intervall	Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Schwingungszahl bezogen auf C	1	9/8		4/3	3/2			2
Differenz bezogen auf den tieferen Nachbarton		9/8			9/8			
Ergänzungen der fehlenden Töne durch Addieren von Sekundenintervallen			9/8 x 9/8 = 81/64			3/2 x 9/8 = 27/16	27/16 x 9/8 = 243/128	
Schwingungszahlen bezogen auf die Gesamttonleiter C	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
*	384/384	432/384	486/384	512/384	576/384	648/384	729/384	768/384
Als ganzzahlige fortlaufende Proportion (Verhältniszahlen)	384	432	486	512	576	648	729	768

***** (mit 384 als kleinstem ganzzahligen Vielfachen der Einzelnenner der Schwingungszahlen)

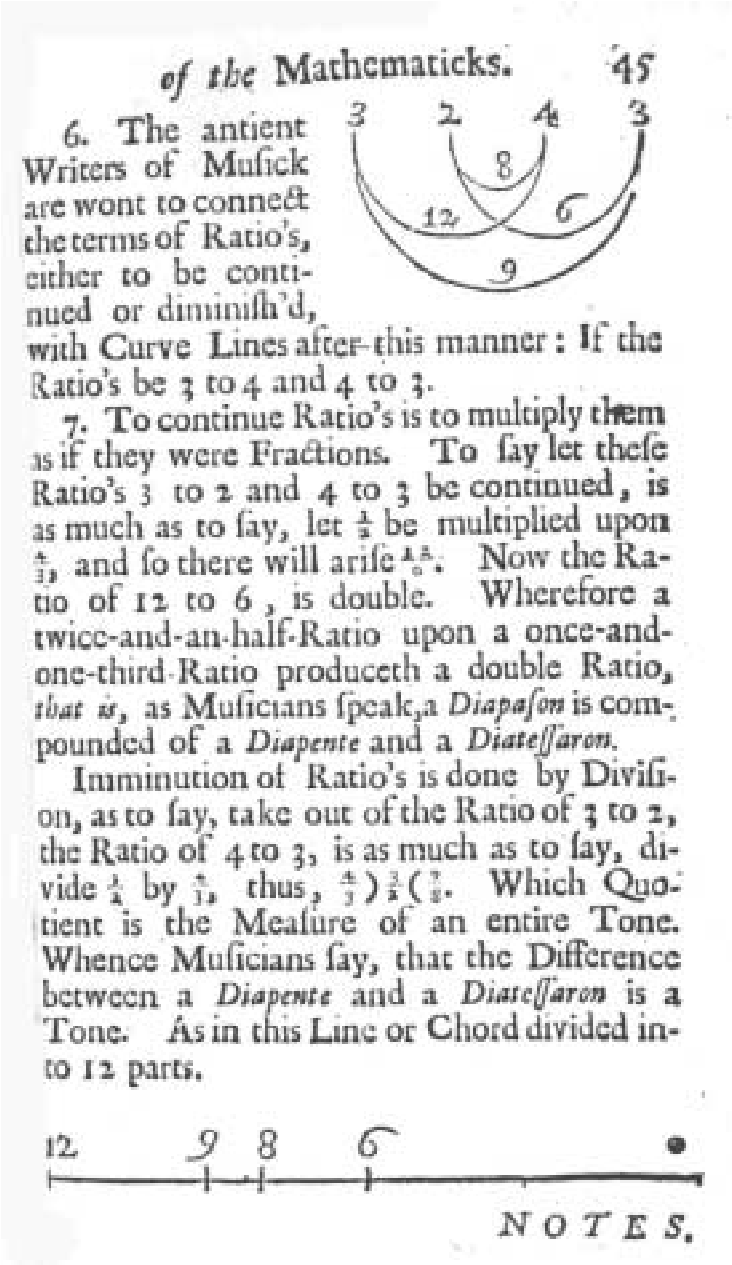
Einen weiteren Weg, zur siebenstufigen pythagoreischen Tonleiter zu gelangen beschreibt Herrman Starke durch Bildung der Quintenfolge:

Intervall	Quinte	Quinte	Quinte	Quinte	Quinte	Quinte	Quinte	
Schwingungsverhältnisse	2/3	1	3/2	9/4	27/8	81/16	243/32	
Per Oktavreduzierung auf Schwingungszahlen zwischen 1 und 2 gebracht.....	4/3	1	3/2	9/8	27/16	81/64	243/128	
.....und nach Größe sortiert	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Differenz benachbarter Töne		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243
Tonbezeichnung	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C'**
Schwingungszahlen dezimal ausgedrückt	1	1,1250	1,2656	1,3333	1,5000	1,6875	1,8984	2

Die sich ergebenden Töne sind die Töne der achtsaitigen LYRA, welche man während der griechischen Blütezeit zur Begleitung des Gesanges anwendete. (nach H. Starke)

Dem aufmerksamen Leser ist nicht entgangen, dass nicht alle Werte der Schwingungsverhältnisse aus den Teilungen in die pythagoreische Tonleiter eingeflossen sind. So fehlen die Terz mit dem Schwingungsverhältnis von 5/4 (bei Pythagoras 81/64) und die Sext mit 5/3 (bei Pythagoras 27/16). Das hat seinen Grund darin, dass für die Pythagoräer die Zahl 10 "heilig" war. Sie ergibt sich als Summe aus 1+2+3+4, den Ziffern der Teilungen, 1; ½; 2/3; 3/4. deshalb standen die Fünfer-Teilungen nicht zur Debatte.

Interessanterweise hat William Oughtred in seinen "Key of the Mathematicks" Aufgaben zur Berechnung von Tonabständen eingebracht. Hier eine Abbildung aus der Ausgabe von 1702:



of the Mathematicks. 45

6. The antient Writers of Musick are wont to connect the terms of Ratio's, either to be continued or diminish'd, with Curve Lines after this manner: If the Ratio's be 3 to 4 and 4 to 3.

7. To continue Ratio's is to multiply them as if they were Fractions. To say let these Ratio's 3 to 2 and 4 to 3 be continued, is as much as to say, let $\frac{3}{2}$ be multiplied upon $\frac{4}{3}$, and so there will arise $\frac{12}{6}$. Now the Ratio of 12 to 6, is double. Wherefore a twice-and-an-half-Ratio upon a once-and-one-third-Ratio produceth a double Ratio, *that is*, as Musicians speak, a *Diapason* is compounded of a *Diapente* and a *Diatessaron*.

Imminution of Ratio's is done by Division, as to say, take out of the Ratio of 3 to 2, the Ratio of 4 to 3, is as much as to say, divide $\frac{3}{2}$ by $\frac{4}{3}$, thus, $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$. Which Quotient is the Measure of an entire Tone. Whence Musicians say, that the Difference between a *Diapente* and a *Diatessaron* is a Tone. As in this Line or Chord divided into 12 parts.

NOTES.

Hier liegt wahrscheinlich ein Druckfehler vor, es müsste heissen "3 to 2 and 4 to 3".

Oktave !

Oktave (Diapason)
= Quinte (Diapente)
+ Quarte (Diatessaron)

!!

Die 12er-Teilung an dieser Stelle kommt überraschend. Wir werden sie allerdings wiedersehen.

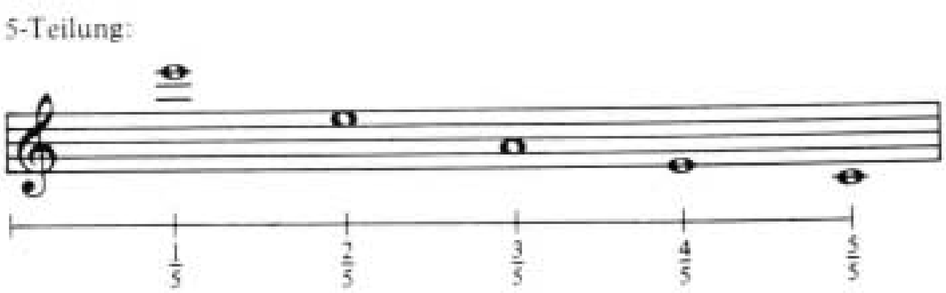
An dieser Stelle sei auch einmal auf die Bedeutung der beiden Zahlen Zwei und Drei in der Rhythmik hingewiesen. Nicht nur, dass sich die Tonlängen durch z.B. mehrfaches Halbieren des Ganztones ergeben. Auch die Taktzahlen werden in ganzzahligen Verhältnissen angegeben, die die Zwei (der Mensch hat zwei Beine) bzw ½ als Basis haben (3/4, 3/8, etc..).

3. Stufungen der Tonhöhen

"Für die Stufung der Tonhöhe gibt es in der abendländischen Diatonik bekanntlich zwei wesensverschiedene Ordnungen, die jedoch zahlenmäßig zu fast dem gleichen Ergebnis führen: die reine und die temperierte Stimmung ." (aus Siegfried Berg: Angewandte Normzahl)

3.1. *Rein oder diatonisch*

E. Schröder hat das diatonische Stimmungsprinzip in sehr prägnanter und deutlicher Weise beschrieben (S. 54 ff). Darin führt er Didymos an, der ca im Jahre 63 v.Chr. die 5/4 -Terz – die sog. **große** Terz - in die Tonleiter des Pythagoras einbaute. Durch die 5er-Teilung am Monochord war auch die Sexte mit 5/3 zugänglich geworden.



Teilt man die Saite in Fünftel auf, so erleben wir einige neue Töne in neuen Intervallen. So ist das e' zu hören, das durch den Reiter bei 4/5 und dem entsprechenden freischwingenden Teil der Saite zu hören ist. 4/5 der Saite führen also zu einer Terz. Steht der Reiter bei 3/5, so erleben wir das a', im Abstand einer Sexte vom Grundton. Bei 2/5 freiem schwingenden Teil der Saite hören wir das e'' und bei 1/5 das e''', E's jeweils um Oktaven erhöht

Entsprechend hat die Terz eine Frequenz oder Schwingungszahl, die 5/4 - also dem Kehrwert der Saitenteilung - des Grundtones entspricht. Damit ergaben sich folgende feststehende Intervalle:

Tonbezeichnung	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C'**
Intervall	Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Schwingungszahl bezogen auf C	1		5/4	4/3	3/2	5/3		2
Differenz bezogen auf den tieferen Nachbarton				16/15	9/8	10/9		

Wir haben es hier mit drei verschiedenen Tonschritten zu tun. 16/15 für den Halbtonschritt zwischen Terz und Quarte und 9/8 für den **großen** Ganztonschritt zwischen Quarte und Quinte sowie 10/9 für den **kleinen** Ganztonschritt zwischen Quinte und Sexte.

Die fehlenden Tonschritte sind durch das Addieren von bekannten Intervallen ergänzt worden und führen so zu einer vollständigen Tonleiter.

Tonbezeichnung	C	D	E	F	G	A	H	C'
Intervall	Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Schwingungszahl bezogen auf C	1		5/4	4/3	3/2	5/3		2
Differenz bezogen auf den tieferen Nachbarton				16/15	9/8	10/9		
Ergänzungen der fehlenden Töne durch Addieren von Intervallen	1	1 x 9/8 = 9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	5/4 x 3/2 = 15/8	2
Differenz bezogen auf den tieferen Nachbarton		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15
Schwingungszahlen bezogen auf die Gesamttonleiter C	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
ganzzahlige fortlaufende Proportion (bezogen auf den Hauptnenner 24)	24	27	30	32	36	40	45	48
Als ganzzahlige fortlaufende Proportion (bezogen auf c= 384)	384	432	480	512	576	640	720	768
Tonbezeichnung	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C'**

Die **Differenzenbildung** zwischen zwei Nachbartönen hat den rechnerischen Vorteil, dass die **Multiplikation** aller einzelnen Tonschritte – also das Addieren der Intervalle der Sekunden - zwischen den acht Tönen das Ergebnis liefern muss, das zu einer Oktave führt. Mit den Differenzwerten der **reinen** Stimmung ergibt sich für die Berechnung folgendes:

$$9/8 \times 10/9 \times 16/15 \times 9/8 \times 10/9 \times 9/8 \times 16/15 = (9/8)^3 \times (10/9)^2 \times (16/15)^2 =$$
$$729/512 \times 100/81 \times 256/225 = 9/1 \times 50/1 \times 1/225 = 450/1 \times 1/225 = \mathbf{2/1.}$$

Die Addition der 7 Tonschritte führt zu einer Oktave !

Gleiches lässt sich übrigens für die Tonschritte der **pythagoreischen** Tonleiter wiederholen/prüfen:

$$9/8 \times 9/8 \times 256/243 \times 9/8 \times 9/8 \times 9/8 \times 256/243 = (9/8)^5 \times (256/243)^2 =$$
$$59049/32768 \times 65536/59049 = 65536/32768 = \mathbf{2/1,}$$

was wiederum dem Schwingungsverhältnis einer Oktave entspricht.
Die Tonschritte sind also richtig gewählt.

Die Schwingungszahlenverhältnisse liessen sich nun mit maximal zweistelligen Ziffern ausdrücken, also recht einfach darstellen. Wie bereits erwähnt, sind konsonante (harmonische) Klänge um so eher zu erzielen, je einfacher die Verhältnisse der Schwingungszahlen zueinander stehen.

Den einfachsten Dreiklang/Akkord bildet von C kommend die Tonfolge c-e-g, nach Schwingungsverhältnissen ausgedrückt 1:5/4:3/2 oder 8/8:10/8:12/8 oder 8:10:12 oder als einfaches ganzzahliges Verhältnis 4:5:6. Die Tonfolge c-e-g entspricht dem sog. **Tonika**-Akkord. Der eine Quinte höher beginnende **Dominant**-Akkord g-h-d' entspricht ebenfalls dem ganzzahligen Verhältnis 4:5:6. Das gleiche Schwingungsverhältnis gilt für die Töne des von der Quart ausgehenden **Subdominant**-Akkords f-a-c'.

Zu diesen Verhältnissen gelangt man auch durch Heranziehen der in der Tabelle zusammengestellten ganzzahligen Proportionen:

- Tonika : c – e – g -> 24:30:36 = 4:5:6 (Faktor 6)
- Subdominate: f – a – c' -> 32:40:48 = 4:5:6 (Faktor 8)
- Dominante: g – h – d' -> 36:45:54 = 4:5:6 (Faktor 9)
-

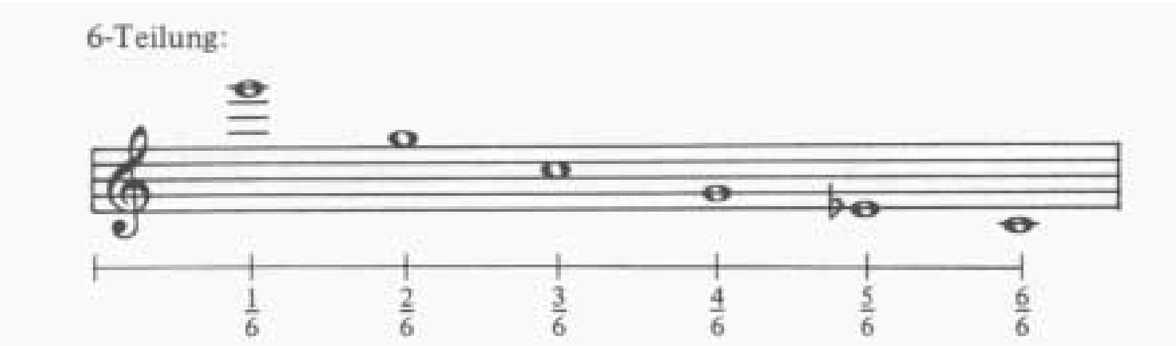
"Weil die diatonische Tonleiter optimal die Forderung nach harmonischem Zusammenklang der Töne befriedigt, bezeichnet man sie auch als "**reine**" Tonskala." (E.Schröder)

Der Tonika-Akkord z.B. hätte in der pythagoreischen Tonleiter die zweistelligen Proportionen: 64:81:96.

Ausserdem hat sich in der **reinen** Stimmung/Tonskala auch der Unterschied zwischen der großen Terz (5/4) und der **kleinen** Terz herauskristallisiert. Eine kleine Terz liegt z.B. bei dem Intervall e – g vor. Das Schwingungsverhältnis der kleinen Terz berechnet sich zu 16/15 (als Differenz zwischen e und f) x 9/8 (als Differenz zwischen f und g)

= 2/5 x 3 = **6**/5.

Bei unserem Monochord mit den äquidistanten Teilungen bräuchten wir also die **6**erTeilung, um die kleine Terz darzustellen. Diese führt mit dem Grundton c zu folgenden Ergebnissen:



Als wirklich neuer Ton taucht hier das e mit einem b-chen davor auf. Dieser Ton wird "es" genannt und liegt einen Halbton zwischen d und e. Ein b-chen vor einer Note geschrieben vermindert die Tonhöhe dieses Tones um einen Halbtonschritt.

Entsprechend unserer bisherigen Berechnungen ergibt sich:

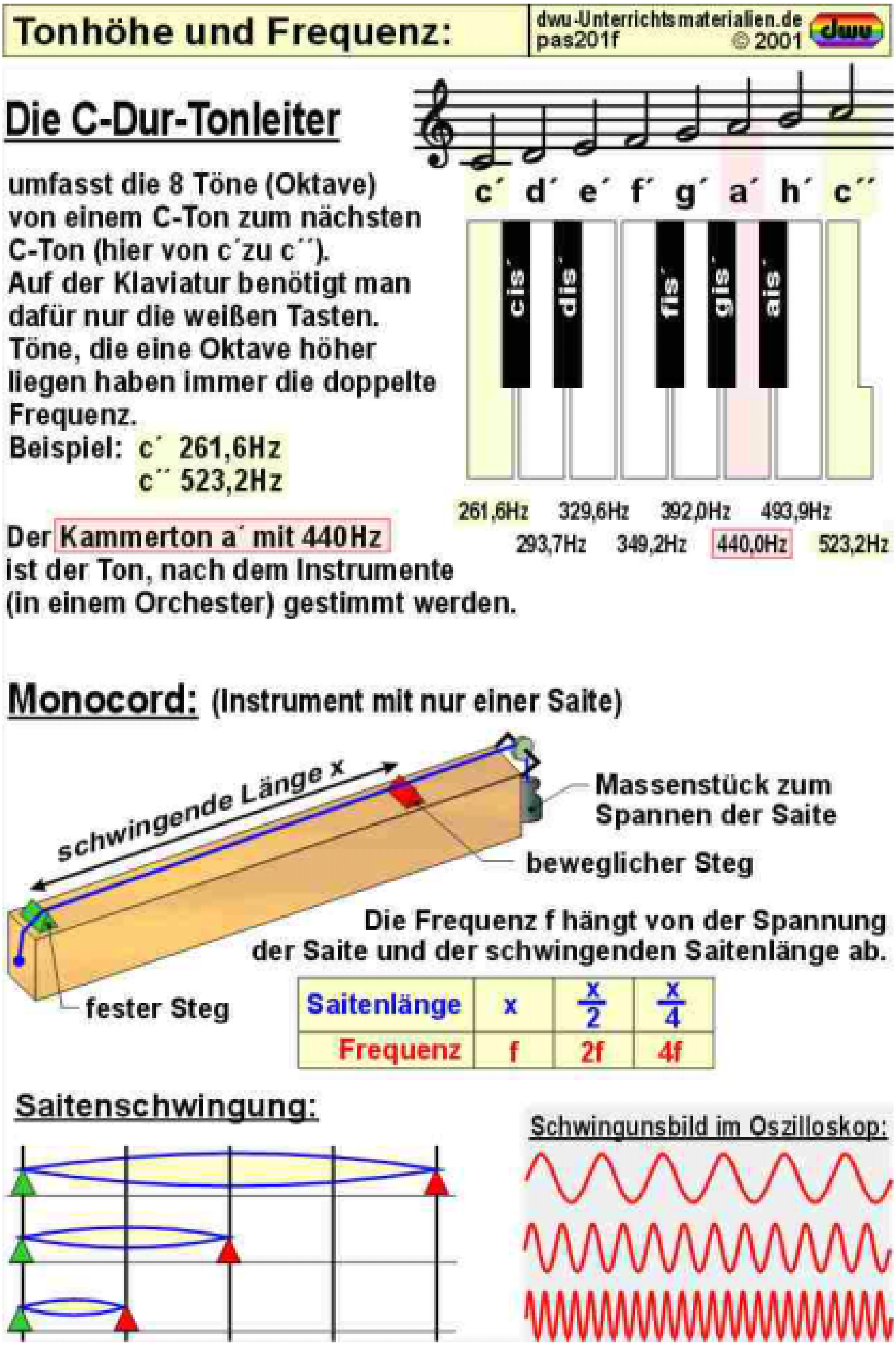
Tonbezeichnung	**C**	**D**	**Es**
Intervall	Prime	Sekunde	Kleine Terz
Schwingungszahl bezogen auf C	1	9/8	
Differenz bezogen auf den tieferen Nachbarton		9/8	16/15
Berechnete Schwingungszahl bezogen auf C	1		9/8 x 16/15 = 3 x 2/5 = **6/5**

Das Intervall es – g lässt sich als **große** Terz ermitteln:
Quinte minus **kleine** Terz => 3/2 : 6/5 = 3/2 x 5/6 = 15/12 = **5/4**.
Oder mit den Werten der 6er-Teilung gerechnet => 6/4 : 6/5 = 6/4 x 5/6 = **5/4**.

Die "Einführung" des "Es" lässt ahnen, dass auch andere Halbtöne denkbar sind, die dann allerdings nicht mehr in die 7-tönige pythagoreische oder diatonische Tonleiter hineinpassen.

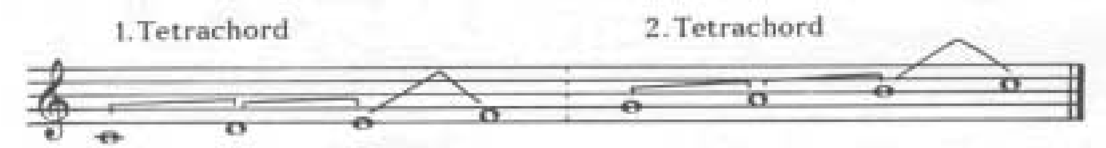
All die anderen Töne der äquidistanten 6er Teilung am Monochord sind uns bereits bekannt, die Quinte (4/6 = 3/2) mit zwei zugehörigen Oktavtönen (2/6 und 1/6) sowie das c' bei 3/6 = ½.

Zum Thema Monochord gibt es im Internet Unterrichtsmaterialien von Dieter Welz aus Ulm, die in der Abbildung zusammengefasst sind.



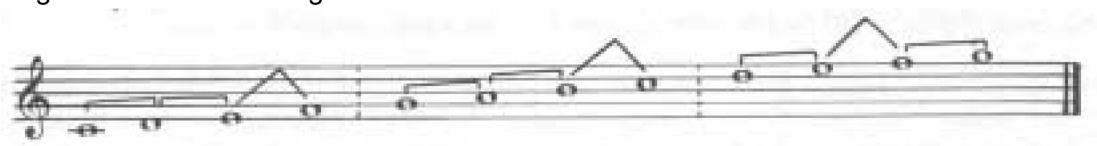
3.2. Der Quintenzirkel

All das, was wir bisher zu der C-Dur Tonleiter erklärt haben, besitzt ebenso Gültigkeit für Tonleitern, die mit anderen Anfangstönen beginnen. Darin eingeschlossen sind auch Töne, die um einen Halbton tiefer oder einen Halbton höher sind als die Ganztöne.
Die Schreibweise für die um einen Halbton vertieften Töne, denen nämlich ein "b-chen" vorgesetzt wird, hatten wir schon kennengelernt. Zur schriftlichen Verdeutlichung erhalten diese Töne die Nachsilbe "es", also ein d mit einem "b-chen" davor ist ein "des"; sofern zwei Vokale in dieser Silbe aufeinander folgen, vereinfacht sich die Bezeichnung zum "es" = "ees" oder zum "as" = "aes".
Die um einen Halbton erhöhten Ganztöne werden mit einem "Kreuz-chen" (#) markiert und mit der Endsilbe "is" versehen. Ein "F" durch ein "Kreuz-chen" um einen Halbton erhöht, heisst "Fis". (Merkhilfe: das # kann man als Symbol für Gefängn**is** sehen.)
Um die restlichen Dur-Tonarten zu bilden, hat man den Weg über die Quinten gewählt. Die C-Dur Tonleiter, die wir bereits kennen, lässt sich in zweimal 4 Töne (Tetrachorde) aufteilen, in deren Tonfolge die Halbtöne jeweils zwischen den beiden letzten Tönen der Tetrachorde auftreten. Die ersten Töne der Tetrachorde liegen eine Quinte auseinander (Abbildungen aus Haunschild, Die neue Harmonielehre).

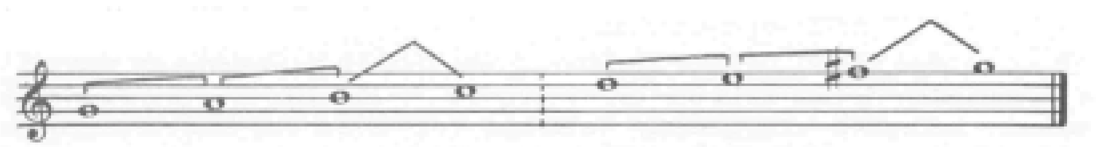


C - Dur Tonleiter

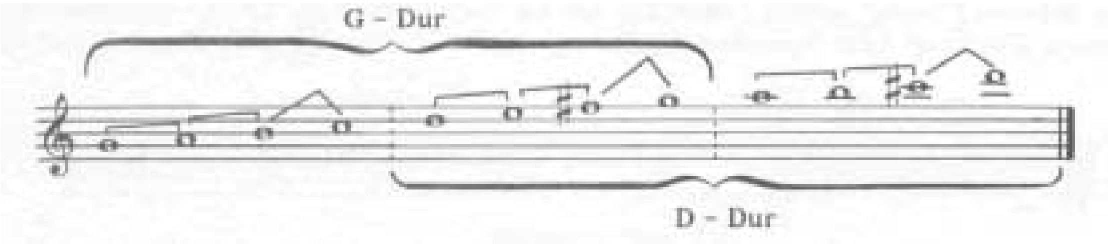
Verlängert man nun diese C-Dur Tonleiter um einen weiteren Tetrachord, so ergibt sich die folgende Tonfolge mit einem weiteren Halbtonschritt zwischen den Tönen 10 und 11. Beginnend bei dem Ton g hätte man eine G-Dur Tonleiter mit dem Schönheitsfehler der



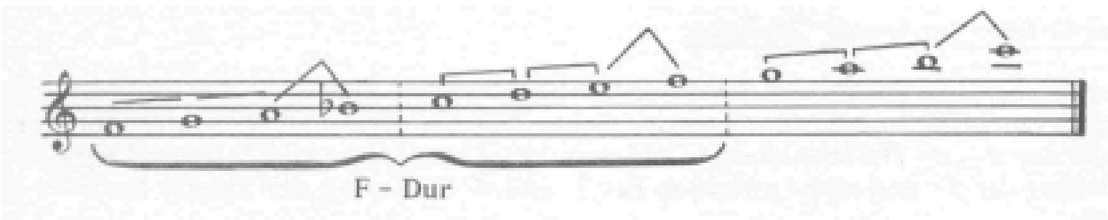
falschen Lage der Halbtöne. Denn bei allen Dur-Tonarten befinden sich die Halbtöne zwischen dem 3. und 4. Ton sowie dem 7. und 8. Ton. Diesen Schönheitsfehler können wir durch ein # vor dem 11. Ton f beheben, indem daraus ein "fis" wird und die 8 Töne so notieren:


G - Dur Tonleiter

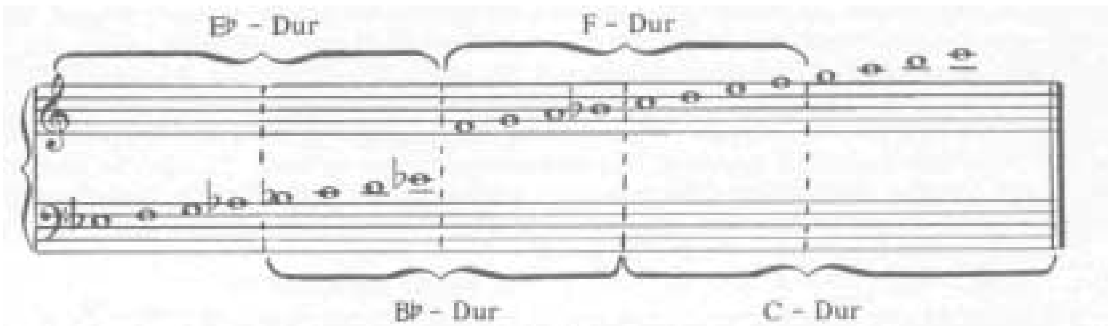
So haben wir die G-Dur Tonleiter erhalten. In der Schreibweise der Tonart wird allerdings ein #-chen gleich rechts neben dem Violinschlüssel notiert. Analog verfahren wir mit der nächsten Tonleiter, der D-Dur Tonleiter.



Das geht nun entsprechend so weiter, d.h. bei jeder nächsten Tonart erhält der 7. Ton immer ein #, wird also um einen halben Ton erhöht. Theoretisch kann das bis zu 12 "Kreuz-chen" als Vorzeichen weitergehen, da eine Oktave aus zwölf Halbtönen besteht, die jeder für sich Ausgangspunkt einer neuen Tonleiter sein können. Dieses Vorgehen ist nicht sinnvoll und praktikabel. Man behilft sich durch die Nutzung der "b-chen" für die letzten 6 Tonarten. Ausgangspunkt ist wiederum die C-Dur Tonleiter, nur geht es jetzt eine Quinte "abwärts". So gelangt man zuerst zur F-Dur Tonleiter:

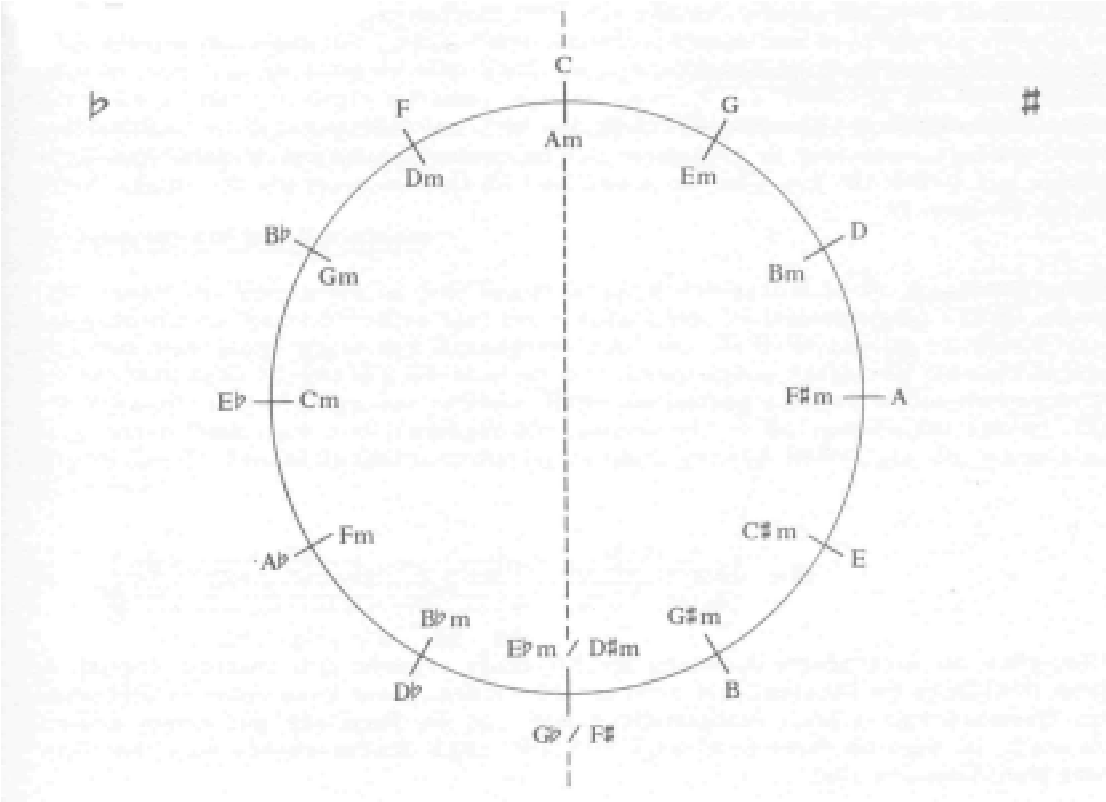


Bei diesen B-Tonarten wird jeweils der 4. Ton um einen Halbton vermindert.



Bei den Moll-Tonarten ist entsprechend zu verfahren. Allerdings liegen hier die Halbtonsprüngen generell zwischen dem 2. un dem 3. sowie dem 5. und dem 6. Ton.

Wir erhalten auf diesem Wege insgesamt 6 B-Tonarten, da man mit Ges-Dur die letzte B-Tonart bildet. Schematisch lassen die sich ergebenden Tonarten in einem Kreis – Zirkel – darstellen.



Die innerhalb des Quintenzirkels stehenden Tonarten sind die **Moll-**Tonarten, die mit der, gegenüber C-Dur um eine Sext erhöhten, A-Moll Tonart beginnen.

Die Tonart E-Moll hat also ein # für das fis, genauso wie G-Dur, während C-Moll mit den gleichen 3 "B-chen" versehen ist wie Es-Dur.

Die Vorzeichenzahl der B-Tonarten der Dur-Reihe kann man sich mit den Sprüchen: "**F**rische **B**rötchen **es**sen **a**lte **D**amen **g**ern" oder "**F**ünf **B**uben **es**sen **As**pirin **des Ges**chäftes **Ces**" leicht merken. Der entsprechende Hilfssatz für die Kreuztonarten in Dur lautet: "**G**eh **d**u **a**lter **E**sel **H**eringe **fis**chen".

Bei genauer Betrachtung des Quintenzirkels fällt eine Diskrepanz auf, die sich rein rechnerisch so ergibt: von C bis C durchlaufen wir 12 Quinten oder 7 Oktaven, d.h. 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 x 3/2 müsste gleich sein 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 oder anders dargestellt:

$$(3/2)^{12} = 2^7$$
$$129{,}7463379 \neq 128$$

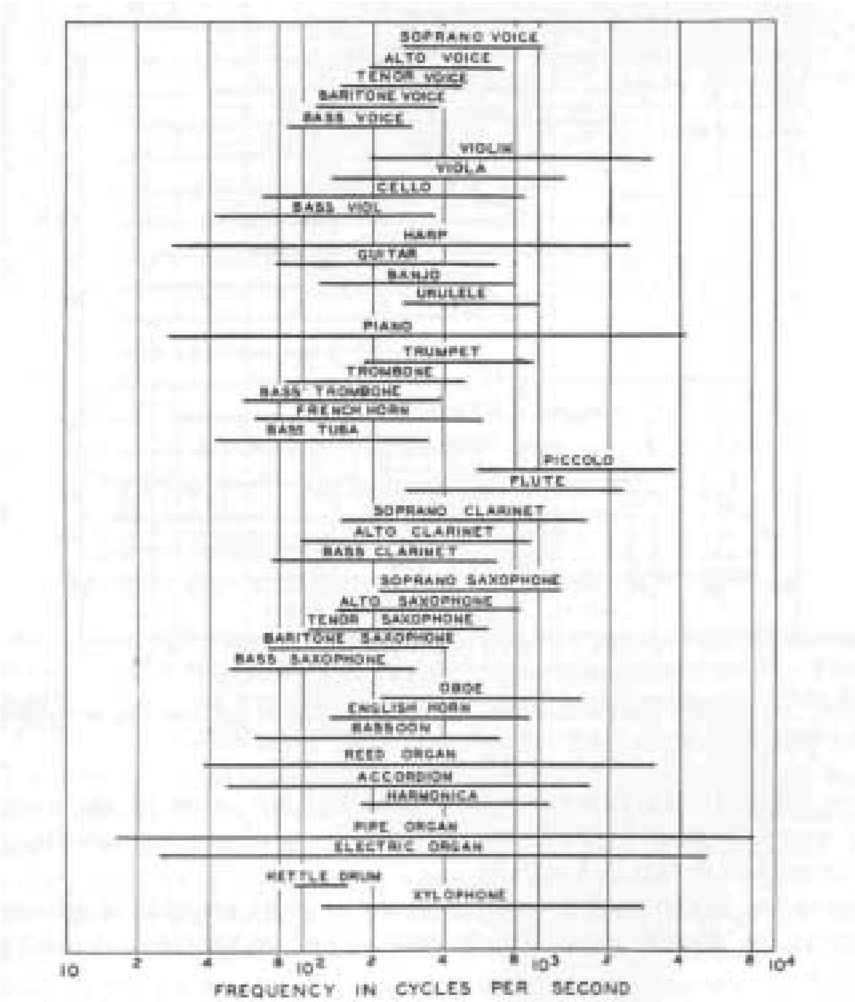
d.h., wir haben es mit einer Ungleichung zu tun. Das durch die Quinten erreichte C hat also eine höhere Schwingungszahl als das durch die Oktave erreichte. Dieses Phänomen war schon dem Pythagoras bekannt.

Den Quotienten aus diesen beiden Werten in Höhe von 1,0136433 nennt man das **pythagoreische Komma**. Bei M. Vogel heisst dieser Wert aufgrund seines Ursprungs – und aus "pädagogischen Gründen" - das **Quintkomma**.

Man hat viele Jahrhunderte mit dieser Ungenauigkeit gelebt bzw. hatte sich zu überlegen, an welcher Stelle man diese Abweichung am besten ausgleichen konnte. Aus den bisherigen Ausführungen wird ersichtlich, dass sich in den durch den Quintenzirkel definierbaren Tonarten durch die Benutzung von Halbtonstufen "aller" Arten eine große Zahl von Tönen ergab. Die Spielbarkeit all dieser Töne hing vom Instrumententyp ab. Auf einem Saiteninstrument, dessen Tondefinition durch die - einem beweglichen Steg (Reiter) eines Monochords vergleichbare – Grifflage der Finger erfolgte, sind alle Töne der reinen Stimmung spielbar. Bei einem Tasteninstrument wie dem Klavier oder einer Klarinette sind der Auswahl der Töne aus rein praktischen Gründen Grenzen gesetzt.

Ausserdem bestanden zwischen manchen Nachbartönen so geringe, kaum unterscheidbare Tonhöhenunterschiede, dass man über Vereinfachungen nachdachte, die letztendlich auch die Zusammenspielfähigkeit der damals bekannten Instrumente verbessern bzw. ermöglichen sollte.

In der folgenden Abbildung sind zur Verdeutlichung der Möglichkeiten die Tonumfänge einzelner Instrumente sowie der menschlichen Stimme dargestellt (aus OLSON):



3.3. Temperierte Stimmung

Es mussten also Instrumente geschaffen werden, die trotz fester Stimmlage modulierbar sein mussten. E. Schröder schreibt hierzu: " Aus der Sicht des mathematischen Aufbaus von Tonskalen war folgende Forderung zu befriedigen: alle durch das Instrument mit fester Tonlage verfügbaren Töne müssen die Funktion des Grundtons einer Tonleiter übernehmen können." Das mündete, wie E. Schröder weiter beschreibt , u.a. in die Konstruktion eines Klavichordes mit 19 Tonschritten in der Oktave von Marin Mersennes (1588 – 1648). Bei dieser Konstruktion litt die Spielbarkeit des Instrumentes und seine Modulationsfähigkeit war auch begrenzt. " Bereits Mersenne hatte eingesehen, dass man hier Abstriche bezüglich der Reinheit der Intervalle vornehmen muss, um ein spielbares Tasteninstrument entwickeln zu können. Diese Abstriche sind natürlich in erträglichen Grenzen zu halten."

All diese Überlegungen mündeten in die Einführung einer neuen Stimmung – der **temperierten** Stimmung, in der alle Tonschritte in einer 12-tönigen Tonleiter, z.B. zwischen c und c' **"gleichweit"** voneinander entfernt sein sollten und alle Töne als Grundton einer eigenen Tonleiter einsetzbar sind. Dazu war es erforderlich, nahe beieinanderliegenden Nachbartönen die gleichen Schwingungszahlen bzw Schwingungsverhältnisse/Intervalle zuzuordnen. Eine Unterscheidung in der Tonhöhe von z.B. "gis" und "as" sollte entfallen.

" Zwei Tonintervalle sind für unser musikalisches Empfinden genau dann gleich, wenn die Quotienten ihrer Frequenzen miteinander übereinstimmen. "

Andererseits soll sich die Frequenz – auf 12 Tonschritte gleich verteilt – verdoppeln ! Beide Forderungen sind dann erfüllt, wenn der Quotient der Schwingungszahlen zweier benachbarter, sonst beliebig wählbarer Töne $q = \sqrt[12]{2}$ ist, denn es muss gelten $q^{12} = 2$. Geht man also von einem Ton mit der Frequenz f um einen ganzen Ton höher, so gehört zu diesem die Frequenz f mal q^2, während beim Fortschreiten um einen halben Ton die neue Frequenz bei f mal q liegt. Übernimmt man in die neue Tonleiter den Wechsel von Ganz- und Halbtonschritten aus der pythagoreischen und diatonischen Tonleiter, so ergibt sich folgende Lösung für die Verhältnisse der Tonfrequenzen. " (E. Schröder)

Tonbezeichnung	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C'**
Intervall	Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Schwingungsverhältnis bezogen auf C	$\sqrt[12]{2^0}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	$\sqrt[12]{2^{12}}$
Schwingungsverhältnis bezogen auf C (dezimal)	1	$1{,}059463^2$ = 1,1224618	$1{,}059463^4$ = 1,2599206	$1{,}059463^5$ = 1,3348393	$1{,}059463^7$ = 1,4983061	$1{,}059463^9$ = 1,6817915	$1{,}059463^{11}$ = 1,8877468	$1{,}059463^{12}$ = 2
Tonnummer = Anzahl der zum Intervall gehörenden Halbtöne	0	2	4	5	7	9	11	12

Die Schwingungsverhältnisse der nicht dargestellten Halbtöne lassen sich in analoger Weise berechnen. Eingefügt würden sie zur "**chromatischen Tonleiter**" führen, die aus gleich großen Halbtönen besteht.
Nach M. Vogel (S. 240) soll es 1585 der Holländer Simon Stevin gewesen sein, der für gleichgroße Halbtöne den Schwingungszahlsprung von $\sqrt[12]{2} = 1{,}059463$ berechnete: "Seine Arbeiten sind uns aber nicht als Veröffentlichung bekannt. Simon Stevin war indessen nicht der erste, der die gleichstufige Temperierung berechnete. So wie die Chinesen die pythagoreische Stimmung wahrscheinlich schon vor Pythagoras hatten, so war ihnen auch schon vor Stevin die gleichstufige Temperierung bekannt. Josef Needham beschrieb sie in seinem Buch "Science and Civilisation in China" (Band 4, Cambridge 1962ff, S. 220ff) als "the princely gift of ChuTsai-Yü". Für die Schrift des chinesischen Prinzen gibt Needham die Jahreszahl 1584 an. Die auffällige Nähe der Daten legt die Vermutung nahe, dass Stevin durch die Berichte aus China angeregt wurde. Andererseits lag damals auch in Europa die Gleichstufigkeit in der Luft. "
E. Schröder weist auf die Anregungen hin, die der Spanier Bartolomé Ramos bereits 1482 in seinem Buch "De musica tractatus" für die "gleichschwebend temperierte" Stimmung gab.
Erstmalig wurden die relativen Schwingungszahlen aller 12 Tonschritte in *"Harmonie universelle"* des französischen Mathematikers Marin Mersennes 1636 publiziert.
Interessant ist ein Vergleich der bisher ermittelten Schwingungsverhältnisse aus den einzelnen Stimmungen. In welchem Verhältnis stehen diese zueinander ?

Tonbezeichnung	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C'**
Intervall	Prime	Sekunde	Terz	Quarte	Quinte	Sexte	Septime	Oktave
Stimmungstyp								
pythagoreisch	**1**	**1,1250**	**1,2656**	**1,3333**	**1,5000**	**1,6875**	**1,8984**	**2**
Diatonisch, rein	**1**	**1,1250**	**1,2500**	**1,3333**	**1,5000**	**1,6667**	**1,8750**	**2**
temperiert	**1**	**1,1225**	**1,2599**	**1,3348**	**1,4983**	**1,6818**	**1,8877**	**2**
Chromatisch (zusätzliche Halbtöne)	**Cis-des**	**Dis-es**		**Fis-ges**	**Gis-as**	**Ais-b**		
Tonnummer	**1**	**3**		**6**	**8**	**10**		
Berechnung	$\sqrt[12]{2^1}$	$\sqrt[12]{2^3}$		$\sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}$	$\sqrt[12]{2^8}$	$\sqrt[12]{2^{10}}$		
Relative Schwingungszahlen	**1,0595**	**1,1892**		**1,4142**	**1,5874**	**1,7818**		

Die **temperierte** Quinte erfordert keine Korrektur um das pythagoreische Komma, da

12 Quinten mit einem Schwingungsverhältnis von 1,4983 ($1{,}4983^{12}$) dem Wert der 7 Oktaven (2^7) entsprechen: 127,99 = 128.

Zur Herkunft und Bedeutung des Begriffes "temperiert" sei auf die Ausführungen in Martin Vogel´s "Tonbeziehungen" S. 224 verwiesen und zur Verdeutlichung ein Zitat von Türk aus seiner "Klavierschule" von 1789/1802 herausgenommen:

"Der Ausdruck temperieren bedeutet ungefähr so viel, als: ein wenig von der größten Reinigkeit der Intervalle auf eine dem Gehör erträgliche Art abweichen."

Zusammenfassend lassen sich die Tonabstände der Töne der einzelnen Stimmungen nach E.Schröder grafisch so darstellen:

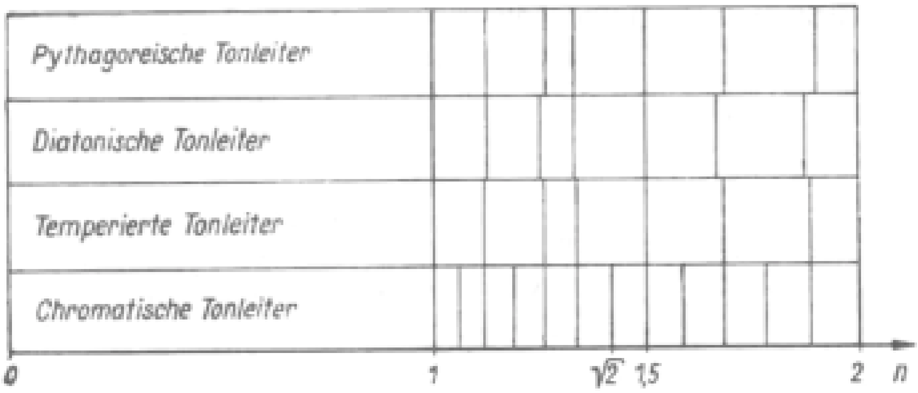


Abb. 36. Graphische Darstellung der Frequenzen von pythagoreischer, diatonischer, temperierter und chromatischer Tonleiter

Wir erkennen hieraus, dass die Töne der temperierten Tonleiter in etwa zwischen denen der diatonischen und pythagoreischen Tonleitern gelegen sind und nur so Äquidistanz zwischen den Tönen erreicht werden kann wie es bei der chromatischen Tonleiter zum Ausdruck kommt. Das Schwingungsverhältnis für einen Halbton beträgt in der reinen/diatonischen Stimmung 16/15 = 1,066 im Vergleich zu 1,059 bei der temperierten Stimmung. Diese Unterschiede liegen für geübte Ohren im Hörbarkeitsbereich.

Wie kann man die Äquidistanz der temperierten Töne auch zahlenmäßig ausdrücken ? Nehmen wir uns als Beispiel 3 hintereinandergespielte Töne, die sich wie 24:48:96 zueinander verhalten. Es ist schnell zu erkennen, dass es sich hier um drei Töne im Abstand von Oktaven handelt und sich das Verhältnis auf 1:2:4 verkleinern lässt. Zwar erklingen die Töne in unseren Ohren mit den **gleichen** Abständen je einer Oktave, diesem Umstand wird aber mathematisch durch die Proportion 1:2 :4 nicht entsprochen. Die gleichen Abstände mathematisch darzustellen, erreicht man nur durch das Einführen von Potenzen für ein und dieselbe Grundzahl. In unserem Beispiel bietet sich als Grundzahl die 2 an, so dass die Oktaven im Verhältnis $2^0 : 2^1 : 2^2$ stehen, also die **Potenzen (Hochzahlen) die gleichen** Abstände aufweisen. E. Bindel sagt dazu auf S. 87:

" Das Hörerlebnis der Skala findet also seinen ihm angemessenen Ausdruck in der Aufeinanderfolge der Hochzahlen unter Zugrundelegung einer und derselben Basis. "

Das Rechnen mit Exponenten (Potenzen, Hochzahlen) ermöglicht die Logarithmenrechnung.

Der Logarithmus ist die Zahl x (Exponent, Hochzahl), mit der man eine andere Zahl b (Basis) potenzieren muss, um einen bestimmten Zahlenwert N (Numerus) zu erhalten.

$$b^x = N \quad \text{oder} \quad x = \log_b N$$

"In b hoch x gleich N ist x gleich dem Logarithmus von N zur Basis b."
Mit Hilfe des Logarithmus lässt sich also ein unbekannter Exponent x ermitteln.

4. Rolle des Logarithmus

4.1. Dyadischer Logarithmus und Cent

Die Oktave stellt das wichtigste Tonintervall mit einem Schwingungsverhältnis von 2:1 in unserem Tonsystem dar ! Daher bietet sich für eine logarithmische Betrachtung die Basis b = 2 sehr gut für die Berechnung der Hochzahlen der temperierten/chromatischen Tonleiter an. Den Logarithmus zur Basis 2 nennt man dyadischen Logarithmus, $\log_2 N$.

Ton	Schwingungs-verhältnisse	Als gebrochene Hochzahl (Potenz) ausgedrückt	Mit dezimaler Hochzahl (Potenz)	Dyadischer Logarithmus
C	**1**	$2^{0/12}$	2^{0}	**0**
Cis – des	**1,0595**	$2^{1/12}$	$2^{0,083}$	**0,083**
D	**1,1225**	$2^{2/12}$	$2^{0,167}$	**0,167**
Dis – es	**1,1892**	$2^{3/12}$	$2^{0,250}$	**0,250**
E	**1,2599**	$2^{4/12}$	$2^{0,333}$	**0,333**
F	**1,3348**	$2^{5/12}$	$2^{0,417}$	**0,417**
Fis – ges	**1,4142**	$2^{6/12}$	$2^{0,500}$	**0,500**
G	**1,4983**	$2^{7/12}$	$2^{0,583}$	**0,583**
Gis – as	**1,5874**	$2^{8/12}$	$2^{0,667}$	**0,667**
A	**1,6818**	$2^{9/12}$	$2^{0,750}$	**0,750**
Ais – b	**1,7818**	$2^{10/12}$	$2^{0,833}$	**0,833**
H	**1,8877**	$2^{11/12}$	$2^{0,917}$	**0,917**
C'	**2**	$2^{12/12}$	2^{1}	**1**

So ist der dyadische Logarithmus von 1,1225 = 0,167, in Formel ausgedrückt:

$\log_2 1{,}1225 = 0{,}167$. Die Berechnung ergibt:

$$\log_2 1{,}1225 = \log_{10} 1{,}1225 \times 1/\log_{10} 2 = \log_{10} 1{,}1225 : \log_{10} 2$$

$$\log_2 1{,}1225 = \log_{10} 1{,}1225 \times 3{,}322 = \log_{10} 1{,}1225 : 0{,}30103$$

$$\log_2 1{,}1225 = 0{,}0501863 \times 3{,}322$$

$$\log_2 1{,}1225 = 0{,}167$$

Der zahlenmäßige Ausdruck eines Halbtones der temperierten chromatischen Tonleiter beträgt 0,083 = 1/12; derjenige eines Ganztones mit 0,167 = 2/12 das Doppelte. Diese Werte entsprechen den Hochzahlen von der Basis 2 der Töne cis/des bzw. d.

Von einer ersten Publikation der Ton-Werte als dyadische Logarithmen berichtete J.Murray Barbour 1940: demnach hat bereits 1670 Juan Caramuel de Lobkowitz in seinem Werk *"Mathesis Nova"* eine "scala musica" veröffentlicht. Interessanterweise hat Caramuel sich bei der Berechnung der Logarithmen an der Methode von John Napier orientiert. Caramuel rechnete allerdings "nur" mit einer logarithmischen Einheit von 1/69, da er ausgehend von der Fequenz von 1024 69mal jeweils 1 100stel von 1024 abziehen konnte, um zum halben Wert, dem Frequenzwert 512, zu gelangen: $(.99)^{69} \tilde{=} 0.5$. Auf diese Zusammenhänge werde ich in einer nächsten Arbeit genauer eingehen. Auch Leonhard Euler hat später (1739) bei seinen musiktheoretischen Arbeiten mit den dyadischen Logarithmen gearbeitet. Euler war es auch, der die (Prim-)Zahlen 1, 2, 3, 5, 7 als "Säulen der Harmonie" bezeichnete.

Um nicht mit den gebrochenen Zahlen des dyadischen Logarithmus die **gleichen Tonabstände der temperierten Tonleiter** ausdrücken zu müssen, hat man zur Vereinfachung eine Oktave in 1200 Cent aufgeteilt. Es ist leicht zu erkennen, dass dabei jeder Abstand der Halbtöne 100 Cent beträgt. Die Tonabstände zum Grundton ergeben sich rechnerisch durch die Multiplikation des dyadischen Logarithmus mit 1200.

Ton	Intervall	Schwing-ungs-verhältnisse	Als dezimale Potenz ausgedrückt	Dya-discher Loga-rithmus	Dyadischer Logarithmus mal 1200 (Cent)
C	**Prim**	**1**	2^{0}	**0**	**0**
Cis – des	**Halbton**	**1,0595**	$2^{0,083}$	**0,083**	**99,6**
D	**Sekunde**	**1,1225**	$2^{0,167}$	**0,167**	**200,05**
Dis – es	**Kl. Terz**	**1,1892**	$2^{0,250}$	**0,250**	**300**
E	**Gr. Terz**	**1,2599**	$2^{0,333}$	**0,333**	**399,97**
F	**Quart**	**1,3348**	$2^{0,417}$	**0,417**	**500,4**
Fis – ges	**"Tritonus"**	**1,4142**	$2^{0,500}$	**0,500**	**600**
G	**Quinte**	**1,4983**	$2^{0,583}$	**0,583**	**699,6**
Gis – as	**Kl. Sexte**	**1,5874**	$2^{0,667}$	**0,667**	**800,4**
A	**Gr. Sexte**	**1,6818**	$2^{0,750}$	**0,750**	**900**
Ais – b	**Kl. Septime**	**1,7818**	$2^{0,833}$	**0,833**	**999,6**
H	**Septime**	**1,8877**	$2^{0,917}$	**0,917**	**1100,4**
C'	**Oktave**	**2**	2^{1}	**1**	**1200**

Für die Berechnung der Cent -Werte kann man selbstverständlich ebenfalls den natürlichen Logarithmus heranziehen:

1200 x ln (Schwingungsverhältnis) : ln 2 = gesuchter Cent-Wert

z.B. für das Intervall Sekunde oder den Ganztonabstand :

1200 x ln 1,1225 : ln 2 = 1200 x 0,11555 : 0,6931 = 1200 x 0.1667 = 200,05

Entsprechende Cent - Berechnungen lassen sich selbstverständlich für alle in diesem Aufsatz beschriebenen Tonleitern (pythagoreisch und diatonisch/rein) durchführen. Dabei sind die Unterschiede zwischen den Tönen der verschiedenen Stimmungen deutlicher zu erkennen wie die (gerundeten) Daten in der folgenden Tabelle andeuten. Besondere Abweichungen sind bei der Terz, der Sext und der Septime zu erkennen. Diese Tonintervalle waren es auch, die auf Grund neuer Erkenntnisse in die Bildung der neuen Tonleitern eingebracht wurden.

Ton	**Schwingungsverhältnisse pythagoreisch**	**Dyadischer Logarithmus**	**Cent (pythagoreisch)**		**Schwingungsverhältnisse diatonisch**	**Dyadischer Logarithmus**	**Cent (diatonisch/rein)**		**Cent (temperiert)**
C	**1**	**0**	**0**		**1**	**0**	**0**		**0**
D	**1,1250**	**0,1699**	**204**		**1,1250**	**0,1699**	**204**		**200**
E	**1,2656**	**0,3398**	**408**		**1,2500**	**0,322**	**386**		**400**
F	**1,3333**	**0,415**	**498**		**1,3333**	**0,415**	**498**		**500**
G	**1,5000**	**0,585**	**702**		**1,5000**	**0,585**	**702**		**700**
A	**1,6875**	**0,7549**	**906**		**1,6667**	**0,737**	**884**		**900**
H	**1,8984**	**0,9248**	**1110**		**1,8750**	**0,907**	**1088**		**1100**
C'	**2**	**1**	**1200**		**2**	**1**	**1200**		**1200**

Aus den Cent-Werten der reinen und der temperierten Quinte gelangt man in erster Näherung zum Cent-Wert des pythagoreischen Kommas (Quintkomma). 12 Quinten entsprechen 7 Oktaven, d.h. für die temperierte Stimmung gilt, 12 x 700 = 7 x 1200 = 8400. Für die reine Stimmung ergibt sich der Wert 12 x 702 = 8424. Der Unterschied von 24 Cents entspricht dem pythagoreischen Komma (genau: 23,46 Cent), also einem Unterschied von ¼ Halbton, der für ein geschultes musikalisches Ohr hörbar ist.

Der Vollständigkeit soll hier kurz auf das **Terzkomma** eingegangen werden. Es drückt den Unterschied zwischen großem und kleinem Ganzton aus:

$$9/8 : 10/9 = 9/8 \times 9/10 = 81/80 = 1{,}01250.$$

Der zugehörige dyadische Logarithmus beträgt 0,0179. In Cent ausgedrückt liegt der Wert des Terzkommas bei: 0,0179 x 1200 = 21,5 Cent.

Welche Bedeutung haben eigentlich all die anderen Teilungsverhältnisse ?
Martin Vogel hat dazu einen interessanten Aspekt hereingebracht ! Auf Seite 110 seiner "Tonbeziehungen" stellt er die Teilungsverhältnisse aus Werten benachbarter Zahlen zusammen. So ergeben die innerhalb einer Oktave liegenden Teilungsverhältnisse miteinander multipliziert immer den Wert der Oktave (1/2), bzw ist die absolute Summe der zugehörigen dyadischen Logarithmen gleich 1 und die Summe der Cent - Werte beträgt 1200.

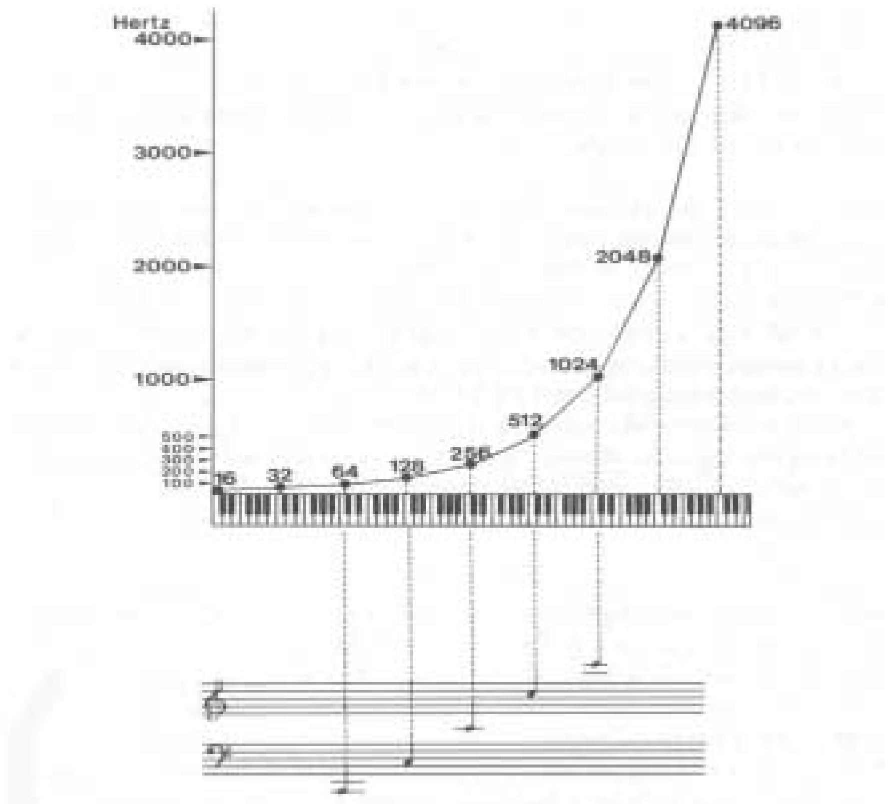
Oktavzahl	**Teilungs-verhältnis**	**Dyadischer Logarithmus**	**Cent**	**Intervall**	**Summe**
0. Oktave	1:2	1	1200	Oktave	1 = 1200
1. Oktave	2:3	0,5849	702	Quinte	
	3:4	0,4150	498	Quarte	1 = 1200
2. Oktave	4:5	0,3219	386	Große Terz	
	5:6	0,2630	316	Kleine Terz	
	6:7	0,2224	267	Septimale Kleinterz	
	7:8	0,1926	231	übergroßer Ganzton	1 = 1200
3. Oktave	8:9	0,1699	204	großer Ganzton	
	9:10	0,1520	182	Kleiner Ganzton	
	10:11	0,1375	165		
	11:12	0,1255	151		
	12:13	0,1155	139		
	13:14	0,1069	128		
	14.15	0,0995	119	Großer septimaler Halbton	
	15:16	0,0931	112	Diatonischer Halbton	1 = 1200
4. Oktave	16:17	0,0875	105		
	17:18	0,0825	99		
	18:19	0,0780	94		
	19:20	0,0740	89		
	20:21	0,0704	84	Kleiner septimaler Halbton	
	21:22	0,0671	81		
	22:23	0,0641	77		
	23:24	0,0614	74	** nach Vogel 73	
	24:25	0,0589	71	Chromatischer Halbton*	
	25:26	0,0566	68		
	26:27	0,0544	65		
	27:28	0,0525	63	Septimaler Drittelton	
	28:29	0,0506	61		
	29:30	0,0489	59		
	30:31	0,0473	57	** nach Vogel 56	
	31:32	0,0458	55		1 = 1200**

* Der chromatische Halbton ergibt sich als Differenz aus großer und kleiner Terz, d.h. 4/5 : 5/6 = 4/5 x 6/5 = 24/25.
** Eigentlich ergäbe die Addition nach Rundung der Werte 1202. Bei 1200 sind alle Rundungen genau berücksichtigt.

In der Summenspalte ist die Summe der dyadischen Logarithmen bzw. der Cent der einzelnen zu den Oktaven gehörigen Werte dargestellt. Z.B. die 4. Oktave umfasst insgesamt 16 Werte (2^4). Das der 4. Oktave zugehörige Teilungsverhältnis von 1:2 erhält man durch die Multiplikation der 16 Teilungsverhältnisse miteinander, also 16:17 x 17:18 x 18:19 x....x 31:32. Es ist leicht zu erkennen, dass sich durch das Wegkürzen der kreuzständigen Ziffern 16:~~(17 x 17:18 x 18:19 x....x 31)~~ 32 am Ende 16/32 übrigbleiben, die dem Wert von ½, dem Teilungsverhältnis der Oktave, entsprechen.

Die folgenden Ausführungen sind E. Bindel – "Logarithmen für Jedermann" entnommen:
" Wie anders werden wir nun einem solchen Gebiete wie der Logarithmenrechnung gegenüberstehen, wenn wir wissen, daß wir beim hörenden Auffassen von Tonleitern oder auch von Akkorden, die mehr als zwei Töne umfassen, etwas tun, was der Herstellung einer Logarithmentafel vergleichbar ist ! Wie anders schauen wir nun auch die Tastatur etwa eines Klavieres an, auf der ja die verschiedenen Oktavtasten in räumlich gleichen Abständen voneinanderliegen und auf der die Zwischentöne einer einzelnen Oktave so angeordnet sind, wie es den entwickelten Abstandszahlen einer temperierten Skala entspricht ! Wo es sich um einen Ganztonschritt handelt, schaltet sich zwischen zwei weiße Tasten eine schwarze als Veranlasserin des dazwischenliegenden Halbtones ein; wo ein Halbtonschritt vorliegt, folgen zwei weiße Tasten direkt aufeinander. Eine solche Tastatur ist im Grunde nichts anderes als ein ins Musikalische verwandelter logarithmischer Rechenstab. Denken wir uns zu den einzelnen Tasten die Schwingungszahlen der zu ihnen gehörigen Saiten hinzu, so haben wir einen wirklichen logarithmischen Rechenstab vor uns. Bei letzterem lesen wir Zahlen ab, bei der Tastatur hören wir durch Anschlagen der Tasten die entsprechenden Töne ab."

Dazu ergänzend die folgende Grafik der Oktavobertöne aus H. Cousto – "Die Oktave", S.26



Obertöne und Klaviertastatur
Die Graphik zeigt die Beziehung der Oktavobertöne zu deren Frequenzwerten. Die waagerechte Achse zeigt den Bereich von 8 Oktaven an, entsprechend der Klaviertastatur. Der Abstand von Oktavton zu Oktavton ist stets konstant. Die senkrechte Achse zeigt die entsprechenden Frequenzwerte. Die Relation ist eine Exponentialfunktion.

Die Notenlinien können auch als logarithmische Skala gesehen werden, bei der der vertikale Abstand (das Intervall) proportional zum Logarithmus der Frequenz ist (log 128 – log 64 = 2.10721 – 1.80618 = 0.3010; N = 2 = 2:1 = das Frequenzverhältnis eines Oktavintervalles).

Weiter mit Ernst Bindel adaptiert an die Daten der obigen Abbildung (an Stelle der Schwingungszahl 435 wird im folgenden mit 64 gearbeitet): " *Was im vorigen als der Zusammenhang zwischen dem Tonleitererlebnis und dem Logarithmus vor uns stand, sei mathematisch noch etwas weiter ausgeführt. Wir legen wieder unser ursprüngliches Beispiel, wonach vor unserem Ohre aufeinanderfolgende Oktaven erklingen, deren Schwingungszahlen die Zahlen 64, 128, 256,.... sein mögen, zugrunde. Dann haben wir hörend das Erlebnis gleicher Tonschritte; wir durchschreiten gleichsam die Zahlenfolge 0, 1, 2, ... Welches ist der rechnerische Zusammenhang zwischen beiden Zahlengruppen? Diese Frage wird leicht durch eine Untereinanderstellung der beiden Zahlengruppen beantwortbar:*

Schwingungszahlen	*64*	*128*	*256*	*512*	*1024*	*..., allgemein y*
Skalenzahlen	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*..., allgemein x*

Wir erkennen folgende Zusammenhänge:

64	=	*64 x 1*	=	64×2^0
128	=	*64 x 2*	=	64×2^1
256	=	*64 x 4*	=	64×2^2
512	=	*64 x 8*	=	64×2^3
1024	=	*64 x 16*	=	64×2^4
....		....		....
allgemein		***y***	**=**	$\boldsymbol{64 \times 2^x}$

Diese leicht einsehbare Beziehung wollen wir so umformen, daß nicht y, sondern x, die Skalenzahl, fertig ausgerechnet vor uns steht:

$2^x = y / 64$, *woraus ja hervorgeht:*

$x = \text{dyad.log } y / 64$

Nun mögen wir unter 64 Schwingungen pro Sekunde eine große Schwingung pro Sekunde verstehen. Dann werden 128 Schwingungen pro Sekunde zwei große Schwingungen pro Sekunde sein, usw., und y gewöhnlichen Schwingungen pro Sekunde werden y/64 große Schwingungen pro Sekunde entsprechen. Dieser Bruch möge durch den Buchstaben Y abgekürzt ausgedrückt werden, so daß also jetzt Y die neue Schwingungszahl in Gestalt der Anzahl großer Schwingungen pro Sekunde bedeutet. Dann hängt die Skalenzahl x mit der zu ihr gehörigen Schwingungszahl Y durch die Beziehung zusammen: $x = \text{dyad. log } Y$ *. Aber auch die Skalenzahl x wollen wir durch eine andere Skalenzahl X ersetzen. Auf diese kommen wir, wenn wir als Letztes noch den Übergang zu den natürlichen Logarithmen vollziehen. Da mögen wir uns ins Gedächtnis zurückrufen, daß für jede Zahl Y gilt:*

$\text{dyad.log } Y / \text{nat. log } Y = \text{dyad.log } 2 / \text{nat.log } 2 = 1 / 0{,}6931$ *woraus folgt:*

$\text{dyad. log. } Y = \text{nat. log } Y / 0{,}6931$

Dann wird aus unserer Gleichung $x = \text{dyad. log } Y$*:*

$x = \text{nat. log } Y / 0{,}6931$ *oder:*

$0{,}6931..\, .x = \text{nat. log } Y$

Das linke Produkt aus den Zahlen 0,6931. . und x soll unsere neue Skalenzahl X sein. Dann besteht zwischen der Schwingungszahl Y und der Skalenzahl X die Beziehung:

$$\boldsymbol{X = \text{nat. log } Y}$$

oder, was damit gleichbedeutend ist:

$$\boldsymbol{Y = e^X}$$

In Worten ausgedrückt, sagt diese Beziehung:

Wenn man ("für"; Erg. KK) die Schwingungszahlen der Töne eine Skala passend mißt und für die Schrittzahlen der Skala ebenfalls eine passende Messung wählt, so erweisen sich diese Schrittzahlen als die natürlichen Logarithmen der Schwingungszahlen."

4.2. Tonlogarithmen

Musiker arbeiten mit Tönen und deren Intervallen. In ihren Tonvorstellungen gehen sie mit Additionen um, benötigen also Vereinfachungen für das Multiplizieren von Schwingungsverhältnissen. Dazu hat die Einführung der Tonlogarithmen beigetragen. Bereits bevor Alexander John Ellis 1884 die Centrechnung auf der 1200er Basis eingeführt hatte, gab es Ansätze zur Rechnungsvereinfachung durch v. Oettingen, der die sog. Millioktave, eine Aufteilung der Oktave in 1000 Teile, nutzte.

Die Cent-Rechnung beinhaltet logarithmische Berechnungen. Ihr Vorteil liegt darin, dass man die Intervalle und deren Werte einfach addieren kann, um zu den neuen Tönen zu kommen: eine reine kleine Terz plus eine reine große Terz ergibt eine reine Quinte. Eine chromatische kleine Terz hat einen Cent-Wert von 300, eine chromatische große Terz wird durch 400 Cent charakterisiert, so dass sich additiv für die chromatische Quinte (bestehend aus 7 Halbtönen) 700 Cent ergeben. Eine chromatische Quinte plus eine chromatische Quarte (500) ergibt eine Oktave mit 1200 Cent.

Intervall	**Schwingungsverhältnis (S)**	**Log $_2$ (S)**	**Log $_2$ (S) x 1200 = Cent**
Kleine Terz	6/5 = 1,2	0,263034	315,6
Große Terz	5/4 = 1,25	0,312928	386,3
Rechenoperation	**Multiplikation**	**Addition**	**Addition**
Quinte	1,2 x 1,25 = 1,5	0,584962	701,9

Aus den oben dargestellten Zusammenhängen und den Cent-Tabellen der pythagoreischen, diatonischen und temperierten Tonskalen wird ersichtlich, dass bei den Tonintervallen der Genauigkeit halber immer auch der Charakter der Tonskala angegeben werden muss, auf den man sich bezieht. Eine diatonische oder reine Quinte unterscheidet sich z.B. von einer chromatischen oder temperierten Quinte um 2 Cent. Gravierender sind die Unterschiede bei einer großen Terz.

Wie bereits erwähnt, lassen sich die Berechnungen auch mit dem natürlichen Logarithmus durchführen, da dieser zum dyadischen Logarithmus in folgender Beziehung steht:

$$\mathbf{\log_2 N = \ln N : \ln 2 = \ln S : \ln 2 \; (= \log_{10} N : \log_{10} 2)}$$

Für die reine Quinte ergibt sich ebenfalls:

$$\mathbf{\log_2 1{,}5 = \ln 1{,}5 : \ln 2 = 0{,}405465108 : 0{,}693147180 = 0{,}584962}$$

Der Wert für die um eine Oktave höhere Quinte, die Duodezime, beträgt:

$$\mathbf{\log_2 3 = \ln 3 : \ln 2 = 1{,}098612288 : 0{,}693147180 = 1{,}584962}$$

Während also die Ziffern rechts vom Komma gleich bleiben, deutet die 1 vor dem Komma auf den um eine Oktave erhöhten Wert hin. Beide Werte in Cent umgerechnet, führt zu 701,9544 für die Quinte und für die Doudezime zu 1901,9544. Die Differenz der Oktave (1200 Cent) ist deutlich herauszulesen wie auch die aus 19 Halbtonschritten bestehende Duodezime (temperierte Duodezime = 1900 Cent).
Die Differenz der Centwerte der reinen Quinte zur chromatischen Quinte von 1,9544 mit 12 (Quinten) mal genommen, führt zum Cent-Wert des pythagoreischen Kommas von 23,46.

4.3. Die Abstände der Stege bei einer Gitarre

Eine Gitarre besteht aus einem (Resonanz)-Körper und dem Griffbrett. Über das Griffbrett laufen die 6 Saiten mit der Möglichkeit zum freien Schwingen zwischen einem Steg am oberen Ende des Griffbretts und einem Haltebund über dem Körper. Über das Griffbrett hinweg sind mehrere Stege verteilt, die dem Spieler das Treffen der richtigen Töne erleichtern. Betrachtet man diese Stege genauer, so ist festzustellen, dass sich der Abstand zwischen diesen Stegen nach unten, also zum Ende der Saite hin, verjüngt.
Auf Grund der bisherigen Ausführungen lässt sich ahnen, woran das liegt.

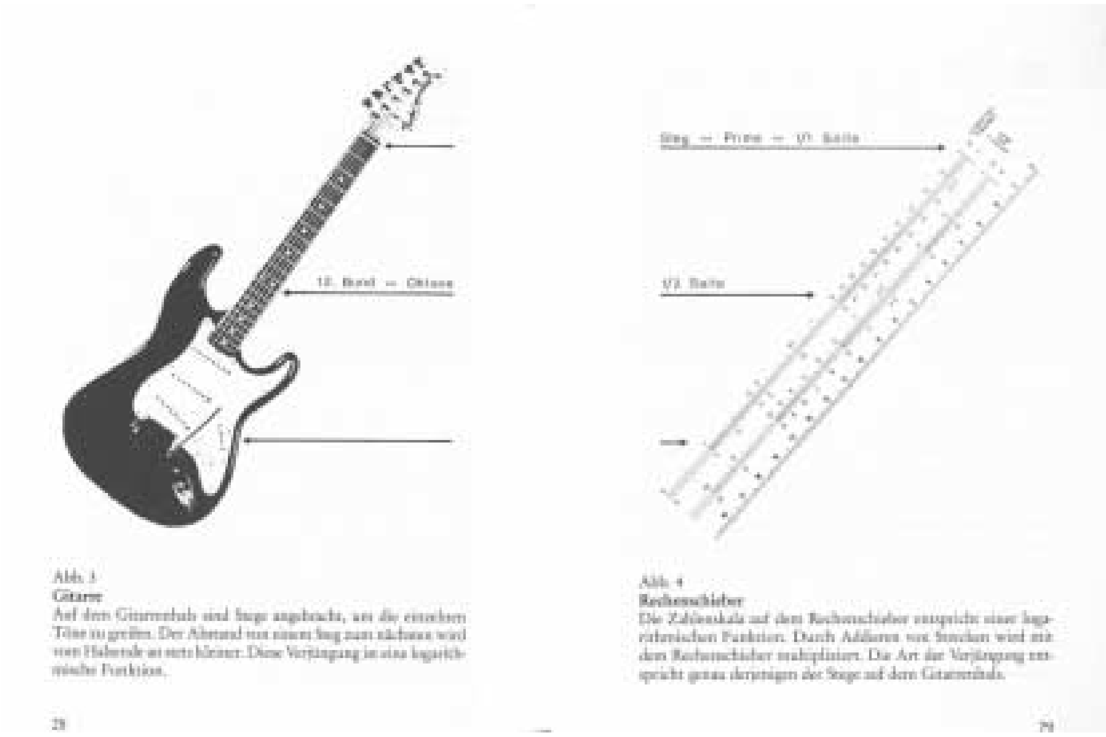
Bei den Ton-Abständen, die zwischen zwei Stegen liegen, handelt es sich um Halbtöne ! Auf einem Griffbrett einer Gitarre ist die chromatische Tonleiter durch entsprechende Stege markiert. So erreichen wir den achten Ton (12. Halbton) einer Tonleiter, also den Oktavton, genau in der Mitte der Saite. An diese Stelle sind auf manchen Gitarren zwei Punkte auf dem Griffbrett eingelassen. Nachmessen des Abstandes vom Auflagesteg ergibt, dass sich genau hier die Saite teilt - bei 66 cm Saitenlänge einer Gitarrensaite der Oktavsteg also im Astand von 33 cm vom Auflagesteg liegt. Andere Punktemarkierungen auf dem Griffbrett deuten auf die Intervalle große Terz, Quarte, Quinte und große Sexte hin.

Max Cousto hat sich in seinem Buch "Die Kosmische Oktave" mit den Berechnungen und den musiktheoretischen Betrachtungen dazu näher auseinandergesetzt. Den Wert 1,059463 kennen wir bereits, er entspricht dem Halbtonabstand der temperierten Tonleiter von $2^{1/12}$. Diese Abstände bilden eine geometrische Reihe mit 12 Gliedern zwischen 1 und 2. Nur durch eine geometrische Reihe war das für die Schwingungsverhältnisse gültige Prinzip zum Aneinanderreihen von Tönen – durch Subtraktion von Intervallen bzw. durch die Division der Schwingungsverhältnisse zu erlangen. In der Tabelle sind die Abstände zwischen den benachbarten Bundstegen berechnet.

Griffbrett	cm	Intervall	Berechnung		
Bund	0,000	Prime			
1. Steg	3,600	Halbton	3,600 : 1,059463	=	3,398
2. Steg	3,398	Ganzton	3,398 : 1,059463	=	3,207
3. Steg	3,207	Kl. Terz	3,207 : 1,059463	=	2,857
4. Steg	2,857	Gr. Terz	2,857 : 1,059463	=	2,697
5. Steg	2,697	Quarte	2,697 : 1,059463	=	2,545
6. Steg	2,545	Tritonus	2,545 : 1,059463	=	2,403
7. Steg	2,403	Quinte	2,403 : 1,059463	=	2,268
8. Steg	2,268	Kl. Sexte	2,268 : 1,059463	=	2,140
9. Steg	2,140	Gr. Sexte	2,140 : 1,059463	=	2,020
10. Steg	2,020	Kl. Septime	2,020 : 1,059463	=	1,907
11. Steg	1,907	Gr. Septime	1,907 : 1,059463	=	1,800
12. Steg	1,800	Oktave	1,800 : 1,059463	=	1,699
13. Steg	1,699	Kl. None			

Die Abstände der Bündstege addieren sich zu 32,54 cm, so dass die Gesamtsaitenlänge bei dem doppelten Wert von 65,08 cm liegt. Konzertgitarren haben eine Saitenlänge von 65 cm.

Die Darstellung des Vergleiches zwischen dem Griffbrett und einem Rechenschieber ist Max Cousto – Die Oktave - sehr gut gelungen und stellt die logarithmischen Beziehungen besonders deutlich dar.



Bezogen auf die Skala des Rechenschiebers liegt die kleine Terz (6/5) bei dem Wert 1,2, die große Terz (5/4) bei 1,25, die Quinte (3/2) bei 1,5 und die Sexte (5/3) bei 1,666.

Gegenüber einer akustischen Gitarre bietet die Elektrogitarre durch die Formung des Gitarrenkörpers auch Griff-Zugang zu den höherenTönen jenseits der Oktave. Dies ist bei der akustischen Gitarre eher schwierig.

Bei anderen Saiteninstrumenten, auch den Streichinstrumenten, sind die Töne auf dem Griffbrett natürlich ebenso in Form einer geometrischen Reihe abzugreifen, allerdings sind die Abstände nicht so schön wie bei einer Gitarre sichtbar gemacht.

4.4. Töne und Normzahlen

In seinem Buch "Angewandte Normzahl" hat Siegfried Berg das letzte Kapitel "Das temperierte System für Tastatur, Notenschrift, Ton- und Intervallnamen" überschrieben. In einer Tabelle dieses Kapitels stellt er die verhältnismäßigen Schwingungszahlen der reinen und der temperierten Stimmung zusammen.

Tafel 1. Verhältnismäßige Schwingungszahlen der reinen und der temperierten Stimmung [1])

Berg: Angewandte Normzahl

	Bisherige Tonnamen	c His	cis des	d	dis es	e fes	f eis	fis ges	g	gis as	a	ais be	h ces	c² his
Reine Stimmung – verhältnismäßige Schwingungszahlen für die Tonarten	C-dur	1	—	1,125	—	1,25	$1{,}\overline{33}$..	—	1,5	—	$1{,}\overline{66}$..	—	1,875	2
	G- „						—	$1{,}406_2$			$1{,}687_5$			
	D- „	—	$1{,}054_6$			$1{,}265_6$								—
	A- „								—	$1{,}582_0$			$1{,}898_4$	
	E- „			—	$1{,}186_5$			$1{,}423_8$						
	H- „		$1{,}067_8$								—	$1{,}779_7$		
	Fis- „					—	$1{,}318_3$			$1{,}601_8$				
	Cis- „				$1{,}201_3$								—	$1{,}977_5$
	...													
	C-dur	1	—	1,125	—	1,25	$1{,}\overline{33}$..	—	1,5	—	$1{,}\overline{66}$..	—	1,875	2
	F- „			$1{,}\overline{11}$..								$1{,}\overline{77}$..	—	
	B- „				$1{,}\overline{185}$.	—			$\overline{1{,}48}$..					
	Es- „									$1{,}580_2$	—			$1{,}975_3$
	As- „		$1{,}053_3$	—			$1{,}316_9$							
	Des- „							$1{,}404_8$	—			$1{,}755_6$		
	Ges- „	—			$1{,}170_3$								$1{,}872_6$	—
	Ces- „					$1{,}248_5$	—			$1{,}560_7$				
	...													
Temp. Stimmung	verhältnismäßige Schwingungszahl	$1{,}000_0$	$1{,}059_5$	$1{,}122_5$	$1{,}189_2$	$1{,}259_9$	$1{,}334_8$	$1{,}414_2$	$1{,}498_3$	$1{,}587_4$	$1{,}681_8$	$1{,}781_8$	$1{,}887_7$	$2{,}000_0$
Normzahlen Reihe R 40	Genauwerte	$1{,}000_0$	$1{,}059_3$	$1{,}122_0$	$1{,}188_5$	$1{,}258_9$	$1{,}333_5$	$1{,}412_5$	$1{,}496_2$	$1{,}584_9$	$1{,}678_8$	$1{,}778_3$	$1{,}883_6$	$1{,}995_3$
	Hauptwerte	1,00	1,06	1,12	1,18	1,25	1,32	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00

[1]) Die nicht eingetragenen Schwingungszahlen sind so hoch wie die nächste darüberstehende derselben Spalte.

Interessanterweise stellt Berg die Schwingungsverhältnisse in einen Zusammenhang mit den Normzahlen der Reihe R 40. Und wie in den letzten beiden Zeilen der Tabelle zu erkennen, stimmen die Werte erstaunlich gut überein, d.h, die Stufensprünge der beiden Reihen sind ähnlich oder gar gleich.

Diese Übereinstimmung, besonders der Genauwerte, rührt daher, dass man hier nicht ganz genau hinsehen (rechnen) darf, sondern sich mit den Näherungen, die in den Normzahlen stecken, begnügen muss. Und das liegt daran, dass 10 in etwa gleich ist $2^{10/3}$. Abgeleitet ergibt sich:

$$10 \sim= 1024^{1/3} = \sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{2^{10}} = \mathbf{2^{10/3}}$$

Diesen Ausdruck für 10 in die Berechnungsformel für die dezimal-geometrische **Reihe R 40** eingesetzt, folgt für den **Stufensprung**:

$$\sqrt[40]{10} = \sqrt[40]{2^{10/3}} = 2^{10/3x40} = 2^{10/120} = \mathbf{2^{1/12}} = \mathbf{\sqrt[12]{2}} = \mathbf{1{,}0594 \sim= 1{,}06}$$

Dieser Wert ist uns als Halbtonschritt aus der temperierten Stimmung bestens bekannt.

Eine Gegenüberstellung der Frequenzwerte auf logarithmischer Basis hat Siegfried Berg ebenfalls dargestellt. In der folgenden Abbildung (Bild 1) ist sie zu sehen:

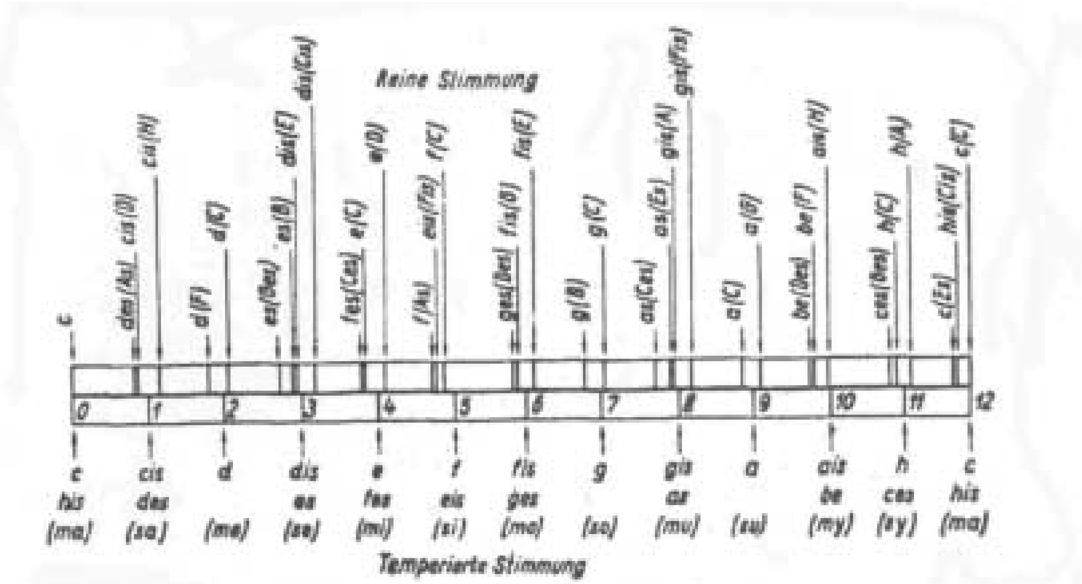
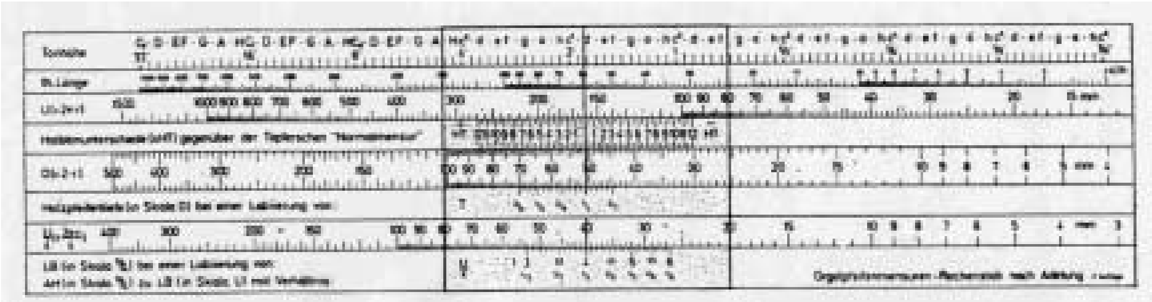


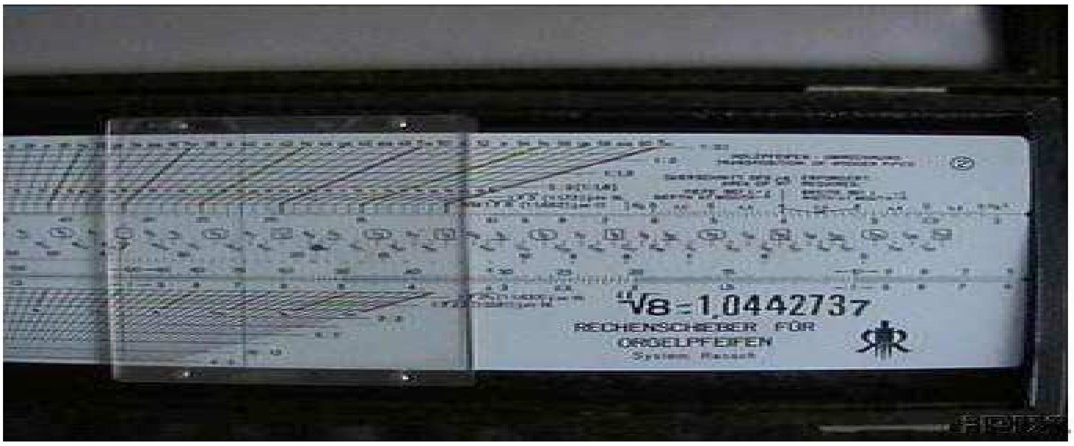
Bild 1. Schwingungszahlen, logarithmisch

4.5. Rechenschieber in der Musik

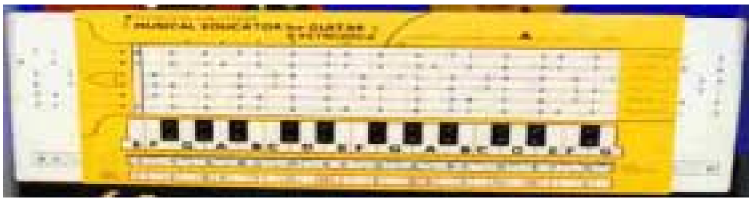
Dem eingangs erwähnten Rechenschieber für Orgelpfeifen ist ein Modell von Wolfgang Adelung, der Orgelpfeifenmensuren-Rechenstab, vorausgegangen, "...auf dem sich schnell alle wesentlichen Maße (absolute Mensuren) und klangbestimmenden Maßverhältnisse (relative Proportionsmensuren) von Labialpfeifen ablesen lassen: theoretische Pfeifenlängen, Weitenmensuren, Umfänge, Durchmesser, Labiumbreiten und Aufschnitthöhen, aber auch die Tiefen von rechteckigen Holzpfeifen. Der Rechenstab enthält in logarithmischem Maßstab verschiedene Skalen, denen die Maße der Töpferschen "Normalmensur" – sozusagen als Maßstab – zugrunde gelegt sind. Auf einem verschieblichen Läufer sind die verschiedenen Maßverhältnisse aufgezeichnet, die – je nach Stellung des Läufers – mit einem Blick die entsprechenden Maße zeigen. Eine kurze Gebrauchsanweisung befindet sich auf der Rückseite des Rechenstabs...". An dieser Stelle soll nicht auf die besonderen Begriffe eingegangen werden. Nur so viel: die Länge einer Saite ist vergleichbar mit der Länge einer Pfeife.

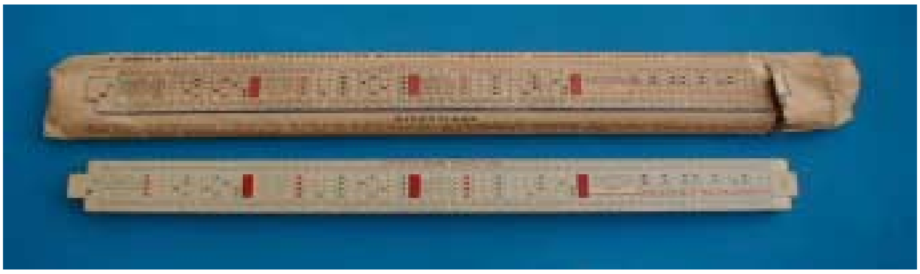


Hier die Originalabbildung des eingangs erwähnten Rechenschiebers für Orgelpfeifen:



Nicht logarithmisch geteilte Rechenschieber sind relativ häufig. Diese entsprechen von ihrer Funktionalität mehr der von Datenschiebern, da sie benutzt werden, um z.B. Akkorde oder Anzahl und Art der Vorzeichen einer Tonart zu bestimmen. Ausserdem werden sie unter pädagogischen Aspekten eingesetzt, um Griffhaltungen z.B. bei der Gitarre zu erlernen. Wie aus den Tonbezeichnungen der unten abgebildeten Datenschieber zu erkennen ist, handelt es sich um amerikanische Modelle.





Wie der Einsatz von Rechenschiebern manchmal durch den Gebrauch von Logarithmentafeln ergänzt wurde, so werden in der Musik zu genauen Berechnungen von Tonintervallen sog. Cent -Tafeln herangezogen. Auf Seite 22 findet sich ein Auszug aus solch einer Tafel. Inzwischen gibt es für derartige Berechnungen Software-Produkte.
In seinem Buch "Der Rechenstab im Unterricht aller Schularten" hat Albert Rohrberg dem Thema "Der Rechenstab und die Tonleiter" einige Ausführungen gewidmet, die sich auf die temperierte Stimmung beziehen. Insofern ist es nicht verwunderlich, daß er für seine Schüler ein Aufgabenbeispiel für die Tastatur des Klaviers wählte.

Der Rechenstab und die Tonleiter. 71

Zusammenhang zwischen dem Rechenstab und der Tonleiter aufzuklären.

Ich ziehe es im Unterricht vor, nicht mit obiger theoretischer Untersuchung beginnend mich dem Problem zu nähern. Ich beginne mit einer Überraschung. Ich stelle die Aufgabe, eine Strecke von 75 mm Länge mehrfach hintereinander aufzutragen und in je sieben gleiche Teile zu unterteilen. Diese Strecke ist die Entfernung von 1 bis 2 auf den unteren Teilungen des normalen Rechenstabes, also log 2. Liegt am nächsten Tage der Streifen Papier mit dieser Zeichnung vor den Schülern, so skizziere ich sie an der Tafel und verlange, durch einige Striche die Zeichnung so zu ergänzen, wie es Fig. 31 zeigt (halber Maßstab). Es entsteht die Tastatur des Klaviers, im wesentlichen eine äquidistante Auftragung der Töne. Was für Fig. 30 galt, gilt demnach auch hier. Lassen wir den Schieber aus dem Stab herausnehmen und so auf die

Fig. 31.

Tastatur legen, daß 1 mit c zusammenfällt, so steigt 2 auf c′, 3 auf g′, 4 auf c″, 5 auf e″, 6 auf g″, 7 auf die Fuge zwischen zwei Tasten und 8 auf c‴.

5. Zusammenfassung

In diesem Aufsatz sind die Methoden aufgeführt, mit denen die wichtigsten fundamentalen Tonskalen (pythagoreisch, diatonisch/rein und temperiert) erstellt werden. Dazu werden ausgehend von den Versuchen des Pythagoras und seiner Schüler mit dem Monochord die Ergebnisse dieser Versuche sowie Unterschiede und Gesetzmäßigkeiten detailliert besprochen.
Die "Aufstellung der Schwingungszahlen von Tonleitern", so Eberhard Schröder, " halte ich für eine der ganz großen Leistungen der Menschheitsgeschichte".

Begriffe wie der "Quintenzirkel" und "pythagoreisches Komma" werden im weiteren Verlauf in Zusammenhang mit den Tonskalen gebracht und erklärt.

Musiker denken nicht in Multiplikationen sondern in Additionen von Tonschritten/Intervallen. Dieser Eigenschaft ist durch die Verwendung von Logarithmen – besonders den dyadischen – Rechnung getragen worden. Zur weiteren Vereinfachung ist die Cent – Rechnung in die musiktheoretischen Betrachtungen eingeführt worden. All diese Verfahren sind in diesem Aufsatz hintergründig besprochen und es ist versucht worden, die entsprechenden Zusammenhänge in leicht verständlicher Weise darzulegen.

Auf die Bedeutung der "Tonlogarithmen" wird ebenfalls näher eingegangen. Deren Zusammenhänge mit den Abständen der Griffbünde einer Gitarre und einem Rechenschieber werden ebenso verdeutlicht wie das Zustandekommen der Griffabstände auf einem Sauteninstrument (als einem Monochord-Ersatz). Der Zusammenhang der Tonlogarithmen mit den Stufensprüngen der Normzahlen erfolgt in einem eigenen Kapitel.

Abgeschlossen wird der Aufsatz mit einer kurzen Beschreibung von Rechenschiebern, die in der Musik eingesetzt werden.

Das ausführliche Literaturverzeichnis ist das Ergebnis intensiver Recherchen und kann auch als Ausgangspunkt für weitergehende Betrachtungen dienen.

6. Danksagung

Alle abgebildeten Tonleitern sowie der Quintenzirkel stammen aus Haunschild, Die neue Harmonielehre und konnten mit freundlicher Genehmigung des AMA-Verlages benutzt werden.
Für die Möglichkeit zur Übernahme der Abbildungen der Obertonreihe und dem Gitarren-Rechenschieber-Vergleich danke ich dem Simon&Leutner Verlag.

Die Ausführungen in diesem Aufsatz wären in dieser Form ohne die erwähnte Literatur und ohne einige kritische Anmerkungen von Rechenschieber-Sammlerfreunden (E.P.; P.H.; P.M.; R.S.) nicht denkbar gewesen.

Jeder der zitierten Autoren hat mit seinen Arbeiten erheblich zu meinem Verständnis der Thematik beitragen können. So konnte es in diesem Aufsatz lediglich das Ziel sein, Zusammenhänge herauszustellen, die bei dem einen oder anderen der zitierten Autoren auf Grund unterschiedlicher Betrachtungsweisen bzw. Fachrichtungen nicht so ganz deutlich geworden sind.

Mir ist klar, dass diese Ausführungen nur mit großer Konzentration zu verfolgen sind. Dennoch hoffe ich, meine Zielsetzung erreicht zu haben und freue mich über jede Anmerkung zu diesem Aufsatz sowie über Informationen zu Rechenschiebern, die spezifisch für Anwendungen in der Musik entwickelt wurden.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Dr. Eberhard Schröder, der sich die Mühe machte, diese Arbeit kritisch durchzuschauen.

Dr. Klaus Kühn
Sommerstrasse 36
82140 OLCHING

7. Literatur

1. Wolfgang Adelung: Einführung in den Orgelbau, Breitkopf & Härtel Musikverlag Leipzig 1972
2. J. Murray Barbour: Musical Logarithms, Scripta Mathematica Vol VII, S. 21 – 31 (1940)
3. Siegfried Berg: Angewandte Normzahl, Beuth-Vertrieb GmbH Berlin und Krefeld 1949
4. Ernst Bindel: Logarithmen für jedermann, Verlag Freies Geistesleben Stuttgart 1983
5. Hans Cousto: Die Oktave – das Urgesetz der Harmonie, Simon&Leutner Berlin 1987
6. Hans Cousto: Die Kosmische Oktave – der Weg zum universellen Einklang, Synthesis-Verlag Essen 1984
7. Frank Haunschild: Die neue Harmonielehre Band 1, AMA-Verlag Brühl 1988
8. Hermann von Helmholtz: Die Lehre von den Tonempfindungen 3. unveränderte Nachdruckauflage der 6. Ausgabe Braunschweig 1913; Dieses Standardwerk geben einige der anderen Autoren in ihrem Literaturverzeichnis an, andere nicht.
9. Otto Kienzle: Normungszahlen, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950
10. G.F. Lipps: Grundriss der Psychophysik, Sammlung Göschen Band 98, 1. Auflage, Leipzig 1899; Band 98, 3. Auflage, Berlin und Leipzig 1921
11. Harry F. Olson: Music, Physics and Engineering, 2nd Edition, Dover Publications New York 1967
12. Albert Rohrberg: Der Rechenstab im Unterricht aller Schularten, Druck und Verlag R. Oldenbourg, Berlin München 1929
13. Eberhard Schröder: Mathematik im Reich der Töne 2. Auflage, Deutsch-Taschenbuch Band 48, Verlag Harry Deutsch, Thun 1990
14. Hermann Starke: Physikalische Musiklehre, Quelle&Meyer Leipzig 1908
15. Martin Vogel: Die Lehre von den Tonbeziehungen; Verlag für systematische Musikwissenschaft, Bonn-Bad Godesberg 1975
16. Dieter Welz: www.DWU.Unterrichtsmaterialien.de
17. Www.Tuning & temperament bibliography aus: http://www.xs4all.nl/~huygensf/doc/bib.html mit über 4600 internationalen Referenzen oder Links