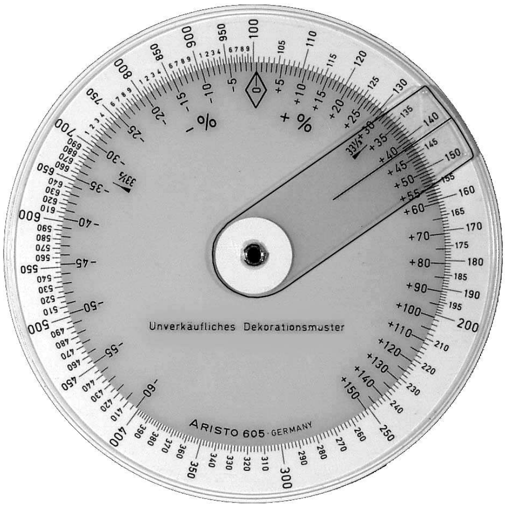
Archimedes - Seine Idee der Logarithmen

Peter Holland



Einführung

Wenn man sich mit Rechenschiebern beschäftigt, dann sind einem selbstverständlich auch Logarithmen vertraut. Sofern man sich auch nur ein wenig mit der Geschichte des Rechenschiebers und der Logarithmen auseinander setzt, stößt man sofort auf die Namen Napier und Briggs. Napier veröffentlichte 1614 die erste Logarithmentafel [1] und hat die Bezeichnung 'Logarithmus' geprägt; Briggs besorgte mit Zustimmung Napiers die Umstellung der Logarithmen auf die Basis 10, und im Jahre 1617 erschien die erste 'dekadische' Tafel [2].
Wenn man nun weiter in die Materie eindringt, lernt man die Namen Stifel [3] und Bürgi [4] kennen. Beide haben Verdienste auf diesem Gebiet, sind aber bei weitem nicht so bekannt wie Napier und Briggs.
Vor einigen Jahren stieß ich jedoch auf eine Literaturstelle, die ich nicht erwartet hätte: Die Redaktion der 'Aristo-Mitteilungen' im Hause der Aristo-Werke Dennert & Pape KG hatte offensichtlich einen Hinweis bekommen, dass bereits Archimedes sich mit arithmetischen und geometrischen Reihen beschäftigt habe. Daraufhin bat sie das Institut für Geschichte der Naturwissenschaften der Universität Hamburg um Auskunft. Professor Menso Folkerts antwortete daraufhin unter anderem: "Die Nachforschungen haben ergeben, daß sich Archimedes tatsächlich mit dem ähnlichen Problem befasst hat, und zwar ist darüber berichtet im Arenarius, Kap. 3 § 6 (ed. Heiberg, Archimedis opera omnia II, Leipzig 3/1913, S. 240, Z. 20-28)." [5]
Für mich waren diese Zeilen Ausgangspunkt eigener interessanter Untersuchungen zum Thema 'Archimedes und der Rechenschieber', von denen ich im Folgenden berichten werde. Sicherlich ist diese Thematik dem Kenner der Mathematikgeschichte vertraut, für die Mehrzahl der Sammler und Liebhaber mag sie jedoch einen Neuigkeitswert haben.

Erste Fundstellen

Eine erste Sichtung meiner Literatur über Rechenschieber und Logarithmen hatte zum Ergebnis, dass ein Hinweis auf Archimedes in den meisten Werken nicht enthalten ist. Dies bezieht sich verständlicher Weise auf Anleitungshefte und -bücher, erstaunlicher Weise aber auch auf viele Werke, deren ausdrückliche Intention es ist, einen Einblick in die Rechenschieber- oder Logarithmen-Geschichte zu geben. Es gab jedoch auch einzelne kurze Hinweise, die allerdings inhaltlich noch nicht besonders fruchtbar waren.
So schreibt Gutzmer: "Schon Archimedes hat in seiner Sandrechnung den Grundgedanken des logarithmischen Rechnens angesprochen." [6]
Smith trägt in Edinburgh 1914 anlässlich der 300-Jahr-Feier zu Ehren Napiers vor: "such a relationship as $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ had been frequently recognised from the time of Archimedes" [7]
Auch Hartmuth bleibt recht unspezifisch: "Auch der berühmte Archimedes (...) hatte sich schon mit den eigenartigen Beziehungen beschäftigt, die zwischen arithmetischen und geometrischen Reihen bestehen." [8]
In einer DDR-Veröffentlichung für das Fernstudium heißt es: "Schon bei Archimedes findet sich der Grundgedanke der Logarithmen." [9]
Anthes führt knapp aus: "Die dafür grundlegenden mathematischen Zusammenhänge zwischen geometrischen und arithmetischen Folgen hat man schon sehr viel früher benutzt (Altbabylon, Euklid, Archimedes)." [10]
Ebenfalls bei einer Andeutung belässt es Waldvogel, wenn er schreibt: "The idea that leads directly to the mathematical object we refer to as logarithm can be foud already in the works of Archimedes (...). However, Archimedes missed the final breakthrough, and unfortunately his ideas were not picked up later." [11]
Anzunehmen ist, dass den genannten Autoren die genauen historischen Bezüge im Detail vertraut waren. Jedoch war das Ziel ihrer jeweiligen Publikationen offensichtlich so angelegt, dass eine genauere Ausführung angesichts des Adressatenkreises entweder unnötig oder nicht beabsichtigt war.

Mehr als Andeutungen in weiteren Fundstellen

Eine weitere Gruppe von Autoren gibt einen kleinen Einblick in Archimedes 'Sandrechner', seinem entscheidenden Werk in diesem Zusammenhang, geht auf die originale Quelle teilweise explizit ein, führt seinen gesamten Gedankengang jedoch nicht vollständig aus. Dadurch wird der Blick auf Archimedes zwar grundsätzlich möglich, im Detail aber jedoch eher verstellt.
Mark Napier [12], ein Nachkomme von John Napier, verweist 1834 auf die offensichtlich vielfach behaupteten Verbindungen zwischen Archimedes und John Napier, führt dann aber aus: "but our own philosopher (Napier) was not led to his invention or discovery by the preparatory labours of others , or at least that aid was afforded him as much by Archimedes as by any one else." Um die Leistung seines Vorfahrs zu heben, verfolgt er nun den Weg, den Einfluss Archimedes auf Napier zu bestreiten. Zu diesem Zweck erläutert er den Gedankengang Archimedes, bringt das entscheidende Zitat (siehe unten); dies alles jedoch in eindeutiger Absicht: Für ihn bleibt John Napier der unangreifbare Held der eigenen Familie. Diese historische

Ignoranz Mark Napiers amüsiert aus heutiger Sicht, speziell weil er sich offensichtlich gründlich mit Archimedes beschäftigt hatte.
Tropfke [13] schreibt: "In dieser Auffassung kann man nun bereits aus einer archimedischen Stelle das logarithmische Grundgesetz für die Multiplikation zweier Zahlen herauslesen. Archimedes äußert sich gelegentlich in seiner Sandrechnung folgendermaßen:" Dann gibt Tropfke das entscheidende Zitat im Wortlaut (siehe unten), gefolgt von einer kurzen eigenen Umschreibung, die sprachlich jedoch eher verwirrend ist. Ganz umfassend stellt Tropfke danach dar, wie Archimedes Idee, nach ihrer Tradierung durch die Araber, im abendländischen Europa wieder auftauchte und aufgegriffen wurde.
Voellmy führt in seiner oft zitierten Arbeit über Bürgi [14] folgendermaßen aus: "Dieser Prometheus der Mathematik (Archimedes) hat einen langen Brief geschrieben (...). Damit hat Archimedes nicht allein den damaligen Beherrscher von Syrakus unsterblich gemacht, sondern auch das griechische Zahlensystem erweitert (...) Er kam zum Schluß, daß die Zahl der Sandkörner nicht unendlich sei, weil sich eine Zahl angeben liesse, die größer wäre, als die Zahl der Sandkörner, die das Weltall ausfüllen würden; als diese Zahl nannte er, was wir heute 10^{63} schreiben (...)." Weiter nennt Voellmy den von Archimedes festgestellten Zusammenhang von arithmetischer und geometrischer Folge. Auch das entscheidende Zitat (siehe unten) wird genannt.
Allan [15] schreibt: "(...) Archimedes of Syracuse (...), who discovered the logarithmic principle based on a primary arithmetic series and a derived geometric series (...)" Dann folgt eine Gegenüberstellung der beiden Folgen und er endet mit "$b^{m1} \times b^{m2} = b^{m1+m2} = X$. Archimedes' scheme covered only positive non-fractional values of m." Obwohl das wichtige Zitat nicht wiedergegeben wird, vermittelt Allan in höchst gedrängter Form einen gewissen Einblick.
Folkerts [16] wird deutlicher: "Gegenüberstellungen von geometrischen und arithmetischen Folgen findet man schon in der Antike, und zwar bei Euklid ('Elemente' IX 1 1) und Archimedes (im 'Sandrechner'; Kap. 3,5). Archimedes beweist folgenden Satz (die Schreibweise ist modernisiert): Wenn eine geometrische Folge vorhanden ist, deren Glieder mit a_1, a_2, a_3, ... bezeichnet werden und deren Anfangsglied $a_1=1$ ist, so ist $a_n \cdot a_m = a_{m+n-1}$." Sowohl die Begründung für die Subtraktion von 1 bei der Aufsuchung des Gliedes der Folge, das dem Produkt entspricht, als auch das entscheidende Zitat werden kurz genannt (siehe unten).
Allen in diesem Kapitel genannten Autoren ist gemeinsam, dass sie die Gedanken Archimedes nicht nur ansprechen, sondern mehr oder weniger umfangreich auch ausführen. Allerdings wird der Zusammenhang, in dem Archimedes zu seinen Erkenntnissen gelangte, nicht erwähnt. Hier und da fällt der Titel 'Sandrechner' oder 'Arenarius' oder 'Sand Reckoner', aber was der Zweck dieses Werkes war bleibt oft verschlossen.

Sonderfall Menninger

Menninger [17] gibt innerhalb der mir zur Verfügung stehenden Literatur die umfangreichste Darstellung des 'Sandrechners', leider aber geht er auf das entscheidende Zitat (siehe unten) nicht ein. Trotz allem, er entwickelt den Vorgang des Bildens großer Zahlen unter den Beschränkungen des griechischen Zahlensystems umfassend und nachvollziehbar in moderner mathematischer Notation. Auch leistet er eine knappe Einordnung von Archimedes infinitesimalen

Arbeiten. Nach meiner Kenntnis gilt Menningers Werk heute in vielen Teilen als veraltet; der Abschnitt über den 'Sandrechner' ist jedoch nach wie vor sehr fundiert.

Annähernd komplette Darstellungen

Zwei Werke stehen mir zur Verfügung, die sowohl Ansatz und Substanz von Archimedes 'Sandrechner' als auch seine Verbindung mit den Logarithmen aufarbeiten.
Colerus [18], dessen bekanntes Buch 1935 erstmals erschien, nutzt innerhalb seines populär-wissenschaftlichen Ansatzes natürlich die Gelegenheit, etwas Anschaulichkeit zu vermitteln. Schon zu Beginn erweckt er den Eindruck, einem historischen - aber doch nur von ihm erfundenen - Gespräch beizuwohnen: "Nun wurde am Hofe des Königssohnes Gelon von Syrakus einmal darüber gesprochen, daß sich das griechische System der Zahlenschreibung durchaus nicht gut zur Darstellung sehr großer Zahlen eigne, und man mag sich (...) in die Unendlichkeit der Größe nach oben und unten verloren haben." Jetzt noch eine dramaturgische Steigerung durch Colerus: Jemand ruft in diesem Gespräch aus, die "Anzahl der Sandkörner an den Strandküsten Siziliens sei sicherlich unzählbar, unendlich." Trotz dieser Ausschmückungen, man ist nun in dem historischen und wissenschafts-theoretischen Kontext, der zu Archimedes 'Sandrechner' gehört. Und sehr anschaulich, wie bei Colerus zu erwarten, führt er die Sandrechnung vor und endet bei 10^{63}. Leider bricht er hier vorläufig ab und kommt erst viel später im Kapitel über Jost Bürgi auf Archimedes zurück. Dies ist natürlich ein notwendiges Zugeständnis innerhalb eines Buches, das nicht problem-orientiert, sondern personen-orientiert aufgebaut ist.
Faustmann [19] gibt einen knappen und umfassenden Überblick über den 'Sandrechner', seinen Zusammenhang mit den Logarithmen und nennt abschließend die historische Beschränkung: "Archimedes hätte somit schon im 3. Jahrhundert v. Chr. die Logarithmen entdecken können, wenn ihm Potenzen und somit die Multiplikation von Potenzen bekannt gewesen wären." Weiterhin gibt Faustmann, ähnlich wie Tropfke, eine mehrseitige Darstellung der Entwicklungen während der Zeit von Archimedes bis Bürgi und Napier.

Problemstellung in Archimedes 'Sandrechner'

Archimedes lebte von 287 - 212 v. Chr. in Syrakus, Sizilien. Sein Werk 'Der Sandrechner' entstand zwischen 240 v.Chr. und 216 v.Chr. [20]. In der mir vorliegenden deutschen Übersetzung [21] umfasst es elf Seiten.
Der Text beginnt damit, dass dem damaligen Herrscher von Syrakus, König Gelon, zwei Positionen vorgestellt werden, die zum Problem sehr großer Zahlen führen:

> "Etliche glauben, König Gelon, dass die Zahl der Sandkörner unendlich sei. Ich spreche dabei nicht allein vom Sand um Syrakus und im übrigen Sizilien, sondern auch von dem Sande der ganzen bewohnten und unbewohnten Erde. Andere gibt es, die zwar nicht der Ansicht sind, daß die Zahl der Sandkörner unendlich sei, die aber meinen, daß es keine so große Zahl gebe, die die Zahl der Sandkörner übertreffe."

Natürlich ist es für Archimedes klar, dass die erste Position naiv und keines Gedankens wert ist. Die zweite Position erweitet er noch – natürlich nur, um sie im weiteren Verlauf des Textes zu widerlegen. Er spricht jetzt nicht nur vom real existierenden Sand auf der Welt, sondern von einer mit Sand gefüllten Erdkugel:

> "Es ist klar, daß die Vertreter dieser Ansicht, wenn sie sich eine Kugel aus Sand vorstellen, so groß wie die Erdkugel, (...) um so mehr der Ansicht wären, daß keine Zahl namhaft gemacht werden könne, die größer wäre als die Zahl der Sandkörner dieser Kugel."

Archimedes geht noch weiter:

> "Ich aber werde versuchen, (...) klar zu machen, daß Zahlen vorhanden sind, die (...) die Zahl der Sandkörner in einer Kugel, die so groß ist wie der Kosmos", übertreffen.

Jetzt ist die Behauptung klar: Archimedes wird Zahlen benennen, die größer sind als die Zahl der Sandkörner in einem mit Sand gefüllten Kosmos.

Warum ist das im klassischen Griechenland schwierig, wo es doch für uns heute so einfach erscheint? Selbst Kinder kämen heute zu der Lösung, immer mehr Nullen an eine existierende Zahl zu hängen; zwar werden diese Zahlen irgendwann nicht mehr aussprechbar, aber sie sind ohne Größenbeschränkung schreibbar. Erwachsene werden leicht eine Zahl der Form a^x bilden können. Durch Vergrößerung von Basis oder Exponent gelangt man auch so bequem zu beliebig großen Zahlen, die auch noch lange aussprechbar bleiben. Auch hier ist keine Schranke vorstellbar.
Warum war dies im klassischen Griechenland nicht möglich? Dafür gab es zwei Gründe: Zum einen gab es kein Zahlensystem, in dem der Wert einer Ziffer von ihrem jeweiligen Stellenwert abhing. Zum anderen war die Exponential-Schreibweise nicht bekannt. Wer noch Erinnerungen an seine Schulzeit hat, erkennt in den römischen Ziffern ebenfalls diese beiden Problematiken.
Offensichtlich gab es in Griechenland zwei verschiedene Zahlensysteme, die getrennt, aber zum Teil auch gemischt verwendet wurden. Hier die Darstellung eines dieser Systeme (allerdings sind die griechischen Symbole für 50, 500, 5000, 50000 in einer modernen Textverarbeitung nicht perfekt darstellbar):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000
I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ	Γ^{Δ}	H	Γ^{H}	X	Γ^{X}	M	Γ^{M}

Γ	ΠΕΝΤΕ
Δ	ΔΕΚΑ
H	HEKATON
X	ΧΙΛΙΟΙ
M	MYPIOI

Auf diese Art lassen sich 'kleine' Zahlen relativ einfach bilden; ein Beispiel:
XXXΓ^{H}HHHΓII entspricht 3807

XXXΓ^{H}HHHΓII	3807
XXX	1000 1000 1000
Γ^{H}	500
HHH	100

	100 100
Γ	5
II	2
XXXΓ^{H}HHHΓ II	3807

M, die Myriade (10000), ist die höchste mit einem Wort belegte Zahl. Zwar ist noch die Hilfskonstruktion Γ^{M}, also fünf Myriaden (50000), vorhanden. Aber nach 99999 bricht dieses System zusammen!
Nun erscheint Archimedes Behauptung geradezu vermessen: "Ich aber werde versuchen, (...) klar zu machen, daß Zahlen vorhanden sind, die (...) die Zahl der Sandkörner in einer Kugel, die so groß ist wie der Kosmos", übertreffen.

Lösung des Problems

Der Weg zu diesem Ziel ist für Archimedes klar: Zuerst muss er berechnen, wie viele Sandkörner in den Kosmos passen, dann muss er eine Zahl angeben, die größer ist. Aber schon hier steht er vor dem Problem der griechischen Zahlen. Die Anzahl der Sandkörner im Kosmos kann noch nicht ausgerechnet werden, dafür ist sie in griechischen Zahlen ausgedrückt zu groß. Sie muss vielmehr relativ angegeben werden. Archimedes wählt dazu diesen Weg des Größenvergleichs:
Sandkorn → Mohnkorn → Fingerbreite → Stadion → Durchmesser der Erde → Durchmesser der Sonne → Durchmesser der Sonnenbahn → Kosmos.
Nun geht er an die Entwicklung großer Zahlen, deren Ausgangspunkt die Myriade ist:

Eine Myriade		10.000	M	M^1
Eine Myriade Myriaden		10^8	M⋅M	M^2
Diese Zahl nennt Archimedes erste Achtheit.				
$A^1 = M^2$	1. Achtheit	10^8	A	A^1
Eine Myriade A		10^{12}		
Eine Myriade Myriaden A		10^{16}	A⋅A	A^2
A^2	2. Achtheit	10^{16}		A^2
Eine Myriade A^2		10^{20}		
Eine Myriade Myriaden A^2		10^{24}	$A^2 \cdot A$	A^3
A^3	3. Achtheit	10^{24}		A^3
Dieses Verfahren wird fortgesetzt bis zur 10^8ten Achtheit, welche bereits eine Zahl mit 800 Millionen Nullen ist!				
Diese Zahl ist $10^{8\cdot10^8}$!				
A^A	10^8. Achtheit		A^A	A hoch 10^8
Diese 10^8te Achtheit nennt Archimedes erste Periode.				
$P^1 = A^A$	1. Periode		P	P^1

	2. Periode		$P \cdot P$	P^2
	3. Periode		$P^2 \cdot P$	P^3
Dieses Verfahren wird fortgesetzt bis zur 10^8ten Periode, welche eine Zahl mit 80 Billiarden Nullen ist!				
Diese Zahl ist $10^{8\cdot 10^{8\cdot 10^{8}}}$!!				
	10^8. Periode		P^A	P hoch 10^8
Nun ist das Verfahren abgeschlossen, die erreichte Zahl hat 80.000.000.000.000.000 Nullen!				

Diese Tabelle hat sicherlich eine gewisse suggestive Kraft. Trotzdem wird empfohlen, den Gedankengang komplett nachzuvollziehen!
Selbstverständlich kann man diese Generierung fortsetzen, indem man die 10^8. Periode zu einer neuen Einheit macht usw.
Übrigens berechnete Archimedes, dass die Anzahl der Sandkörner des Kosmos kleiner ist als die tausendste Zahl der siebten Achtheit der ersten Periode; das ist lediglich eine Zahl mit 59 Nullen. Und in einer Alternativrechnung für den Fall, dass die Sonne nicht im Mittelpunkt des Kosmos steht, kommt er auch nur zu einer Zahl mit 63 Nullen.

Das entscheidende Zitat

Innerhalb seiner Ausführungen entwickelt Archimedes in Kapitel 3, §§ 6-7 diesen Gedanken (nach dem Text der Czwalina-Übersetzung):

> "Wenn eine geometrische Reihe vorhanden ist, deren Glieder mit a_1, a_2, a_3 .... bezeichnet werden und deren Anfangsglied $a_1 = 1$ ist, so ist $a_n \cdot a_m = a_{m+n-1}$. Es sei z.B. A B C D E F G H I K L eine solche Reihe. A sei gleich 1, und es möge D mit H multipliziert werden. (...) Es ist klar, daß das Produkt innerhalb der Reihe vom größeren Faktor so weit entfernt ist wie der kleinere von der Einheit. Es ist auch klar, daß das Produkt von der Einheit um ein Glied weniger entfernt ist, als die Summe der Entfernungen der beiden Faktoren von der Einheit beträgt. Denn L ist von A aus das 10. Glied, D von A aus das 4. und H von A aus das 7."

In der von Tropfke herangezogenen Heiberg-Übersetzung heißt es:

> "Wenn von Zahlen, die von der Einheit ab in festem Verhältnis stehen [1, a, a^2, a^3, a^4...], irgend zwei miteinander multipliziert werden sollen, so wird auch das Produkt derselben Proportionsreihe angehören und zwar wird dieses [in der Zahlenreihe] von dem größeren der beiden Faktoren ebenso weit abstehen, wie der kleinere von der Einheit in der Proportionsreihe absteht; von der Einheit aber wird es um eine Stelle weniger weit abstehen, als die Abstandszahlen beider Faktoren von der Einheit aus zusammen betragen."

Zur Veranschaulichung:

Archimedes Zählung	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
heutige Exponenten	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Beispiel nach Czwalina				*				*			*

Bezeichnung nach Czwalina	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L
Bezeichnung nach Heiberg	1	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}
Zahlenbeispiel	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Deutlich wird, dass bei der Multiplikation von 8 · 128 = 1024 nach Archimedes das 4. und das 8. Glied der Folge ihr Produkt im 11. Glied haben. Also: $a^n \cdot a^m = a^{m+n-1}$. Beim Rechnen mit Exponenten nach dem heutigen Verfahren findet man das Ergebnis als: $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$.
Tropfke fasst diese Beobachtung so zusammen: "Wären diese archimedischen Rangzahlen von unseren Exponenten nicht um eins verschieden, so hätte Archimedes unsere Formel $a^2 \cdot a^5 = a^7$ sogar wörtlich wiedergegeben."

Ergebnis

Nach diesen Untersuchungen sollte klar sein, dass Archimedes keinesfalls die Logarithmen entdeckt hat. Auch hat er keine Regel für das Rechnen mit Logarithmen aufgestellt. Dazu waren seine mathematischen Möglichkeiten im Altertum zu beschränkt. Aber in seinem 'Sandrechner' kommt er im Zusammenhang der faszinierenden Entwicklung von sehr großen Zahlen an eine Stelle, die im Nachhinein als 'modern' verstanden werden kann. Auch wird verständlich, dass nach dem Zurückdrängen der Araber aus Südwest-Europa und dem erneuten Bekanntwerden seiner Schriften in Europa viele Mathematiker des 16. und 17. Jahrhunderts von diesem einen Zitat seines Werkes angeregt wurden. Auch gab es jetzt einen ökonomischen und wissenschaftlichen Bedarf (Merkantilismus, Astronomie) für das Rechnen mit großen Zahlen, der zu Archimedes Zeit noch nicht vorhanden war.

Literaturverzeichnis und Fußnoten

[1] Napier, John: *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*, Edinburgh, 1614
[2] Briggs: Logarithmorum chilias prima, London, 1617
[3] Stifel, Michael: *Arithmetica Integra*, Jena, 1544
[4] Bürgi, Jost: *Arithmetische und Geometrische Progress-Tabulen*, Universitätsdruckerei, Prag, 1620
[5] Folkerts, Menso: "Archimedes im Rechenstabunterricht", in: Aristo-Werke Dennert & Pape KG (Hrsg.): *Mitteilungen für die Schulpraxis*, Nr. 43, Eigenverlag, Hamburg, 1977, S. 9
[6] Gutzmer, A.: *Zum Jubiläum der Logarithmen – Rede beim Antritt des Rektorats der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg am 12. Juli 1914 gehalten*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1914, S. 8
[7] Smith, David Eugene: "The Law of Exponents in the Works of the Sixteenth Century", in: Knott, Cargill Gilston (Hrsg.): *Napier Tercentenary Volume*, Longmans, Green and Company, London, 1915, S. 82
[8] Hartmuth, Maximilian: *Vom Abakus zum Rechenschieber*, Boysen & Maasch, Hamburg, 1942, S. 46
[9] Fachgruppe Lehrmaterial für Grundlagenfächer im Fachschulfernstudium (Hrsg.): Mathematik I, Lehrbrief 4, *Rechnen mit Logarithmen*, Dresden: 1957, S. 28

[10] Anthes, Erhard: "Zu Hartmut Kochs 'Geschichte der Rechenmaschine' in HBW No. 2/3", in: *Historische Bürowelt*, No.4, Januar 1983, S. 19
[11] Waldvogel, Jörg: "Jost Bürgi, a Swiss discoverer of the logarithms", in: *Proceedings - 4th International Meeting of Slide Rule Collectors, Huttwil, Switzerland, 14th to 16th October, 1998*, Eigenverlag, Dällikon/Zürich, 1998, S. 15
[12] Napier, Mark: *Memoirs of John Napier of Merchiston, his Lineage, Life, and Times, with a History of the Invention of Logarithms*, Blackwood and Cadell, Edinburgh und London, 1834, S. 435
[13] Tropfke, Johannes: *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*, Veit & Comp., Leipzig, 1902/03, Band 2, S. 142-143
[14] Voellmy, E.: *Jost Bürgi und die Logarithmen* [= Beiheft Nr. 5 zur Zeitschrift 'Elemente der Mathematik'], Birkhäuser, Basel, 1948, S. 2-3
[15] Allan, R. K.: *Systematic Slide Rule Technique*, Pitman & Sons, London, 1962, S. 1
[16] Folkerts, Menso: "Michael Stifel (1487-1567)", in: Konrad-Klein, Kühn, Petzold (Hrsg.): *7. Internationales Treffen für Rechenschieber- und Rechenmaschinensammler - IM2001*, Selbstverlag, München, 2001, S. 24
[17] Menninger, Karl: *Zahlwort und Ziffer - Eine Kulturgeschichte der Zahl*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958, Band 1, S. 150-153
[18] Colerus, Egmont [d.i. Egmont von Colerus zu Geldern]: *Von Pythagoras bis Hilbert*, Rowohlt, Hamburg, 1969, S. 49-50 u. 118-120
[19] Faustmann, Gerlinde: *Österreichische Mathematiker um 1800 unter besonderer Berücksichtigung ihrer Logarithmischen Werke*, Österreichischer Kunst- und Kulturverlag, Wien, 1994, S. 4-5
[20] Schneider, Ivo: *Archimedes*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979, S. 33
[21] Czwalina, Arthur: *Archimedes - Über schwimmende Körper und die Sandzahl,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1925, S. 67-78