ARISTO

Herbert Baldermann

Methodische Hinweise für die Einführung des Stabrechnens in der Volksschule

Ba

ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG

Inhalt

Einleitung 3
1. Der Additionsstab 3
2. Der Multiplikationsstab 4
3. Verschiedene Wege zur Feinteilung der Skala 8
4. Das Ablesen der Skalen und die Überschlagsrechnung 6
5. Allgemeines zum Rechenstab ARISTO-Junior 9
6. Multiplikation und Division 10
7. Das Rechnen mit den versetzten Skalen CF und DF 11
8. Die Entstehung der Skalen CF und DF 12
9. Kettenaufgaben 13
10. Die gegenläufigen (inversen) Skalen CI und CIF 14
11. Die Goldene Regel des Stabrechnens 16
12. Die Prozentrechnung 18
13. Die Zinsrechnung 20
14. Quadrate und Quadratwurzeln 21
15. Kuben und Kubikwurzeln 22
16. Läufermarken 23

Sonderdruck Ba

Alle Rechte vorbehalten · Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet
© 1962 by ARISTO-WERKE · DENNERT & PAPE KG · HAMBURG

O/FFE · Printed in Germany · Borek KG 10546

Einleitung

Die Benutzung eines Rechenstabes hat nur dann Sinn, wenn über die bloßen Kenntnisse der „Gebrauchsanweisung" hinaus auch die mathematischen Grundlagen bekannt sind. Nur mit dieser Einsicht wird der Schüler über das einfache Multiplizieren und Dividieren hinauskommen.

Da dem Schüler die Kenntnis des logarithmischen Rechnens fehlt, müssen wir Mittel und Wege finden, die trotzdem das Wesentliche des Stabrechnens aufzeigen. Die Aufgabe dieses Heftes soll es sein, einmal diese Wege der Einführung zusammenzustellen, zum anderen die unterrichtenden Kollegen mit den überraschenden Vorteilen der versetzten Skalen und der reziproken Skalen bekannt zu machen, um zu vermeiden, daß die alte schon vor 100 Jahren verwendete Skalenanordnung noch Grundlage der Einführung wird.

Im allgemeinen hat sich wohl die Meinung durchgesetzt, daß die beste Einsicht in das Arbeiten mit dem Rechenstab dadurch erreicht werden kann, daß jeder Schüler die Skala eines Rechenstabes selbst entwickelt. Diese Entwicklung bedeutet keinen Zeitverlust, da sie uns neben vielen vertiefenden Überlegungen auch viele wiederholende Rechenübungen bringt. Dabei können wir ohne Verwendung von Wertetabellen oder anderen Hilfsmitteln eine Rechenstab-Skala erarbeiten, deren Genauigkeit von der Sorgfalt und von dem Zeitaufwand abhängt.

Die folgenden Wege sollen Hinweise und Anregungen aus der Praxis sein. Ihre Auswertung, Kürzung oder Ausweitung bleibt dem unterrichtenden Kollegen überlassen.

1. Der Additionsstab

1.1 Wir beginnen mit der Wiederholung des Additionsrechenstabes, indem wir zwei gegeneinander verschiebbare Pappstreifen mit gleicher Zentimetereinteilung verwenden.

1.2 Dabei zeigen wir, daß mit einer einzigen Einstellung eine ganze Reihe von Additions- und Subtraktionsaufgaben gelöst werden kann.

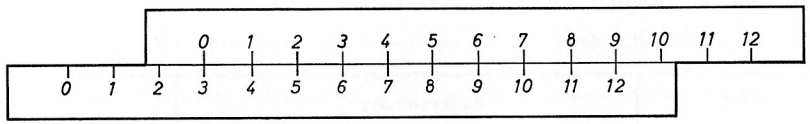


Abb. 1

Wird der Anfang des oberen Streifens über die 3 des unteren gestellt, löst dieser Rechenstab z. B. die Aufgaben

Addition	Subtraktion
$3 + 7 = 10$	$10 - 7 = 3$

Ergebnis: Antragen nach rechts bedeutet Addition
Abtragen nach links dagegen Subtraktion

Bei dieser Einstellung sind noch weitere Aufgaben ablesbar, z. B.:
$3 + 6 = 9$; $3 + 5 = 8$ usw.; $9 - 6 = 3$; $8 - 5 = 3$ usw.

Mit dieser Einstellung können also lauter Additionen abgelesen werden, bei denen der 1. Summand 3 ist. Ferner lassen sich lauter Subtraktionen ablesen, deren Ergebnis 3 ist. Diese Einstellung ersetzt also eine Tabelle!

1.3 Wir ändern die Einteilung (Zoll, Millimeter).
Die Wahl der Einheit hat keinen Einfluß auf die Ergebnisse.

1.4 Bei allen folgenden Übungen kommt es immer wieder darauf an, daß der Schüler gedanklich mit dem Grundprinzip des Rechenstabes arbeitet: Eine Vermehrung bedeutet Anlegen der Zahlenstrecke, eine Verminderung das Abziehen der Zahlenstrecke.

2. Der Multiplikationsstab

2.1 Die Addition und Subtraktion der Zahlenstrecken ist so einfach, daß bei den Schülern von selbst der Wunsch nach einer ebensolchen Vereinfachung der Multiplikation und Division auftritt.

Die Aufgabe lautet also, eine Teilung zu finden, mit der wir bei der Addition von Strecken eine Multiplikation und bei der Subtraktion von Strecken eine Division erhalten.

2.2 Das können wir mit dem Bau eines Stabes aus Zehnerpotenzen zeigen. Die gewählte beliebige Strecke für die 10 bezeichnen wir am Anfang mit 1, am Ende mit 10' und tragen diese gewählte Einheit nochmals an. Der Endpunkt muß jetzt $10 \cdot 10 = 100$ sein. Die dritte Einheit angefügt, gibt den Endpunkt 1000.

$$E + E + E \triangleq 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \text{ usw.}$$

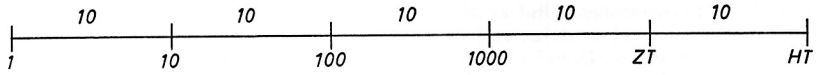


Abb. 2

Auf diese Weise stellen wir nun zwei gleichgeteilte, gegeneinander verschiebbare Streifen her und rechnen damit, z. B. $100 \cdot 1000 = HT$ (Abb. 3). Die 1 des oberen Streifens steht über der 100 des unteren, und das Ergebnis HT wird unter 1000 des oberen Streifens abgelesen.

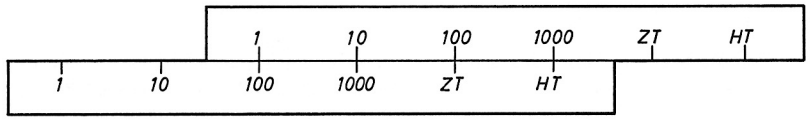


Abb. 3

Dieser Rechenweise entspricht die frühere Kopfrechenaufgabe

$100 \cdot 1000 \triangleq 2$ Nullen $+ 3$ Nullen $= 5$ Nullen, also 100000.

2.3 Wir können statt der Zehnerpotenzen auch Zweierpotenzen wählen.

I	Ausrechnung	II
2^1	2	2
2^2	$2 \cdot 2$	4
2^3	$2 \cdot 2 \cdot 2$	8
2^4	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	16
2^5	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	32
2^6	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	64

Die Spalte I der Zweierpotenzen und die Spalte II der ausgerechneten Werte ordnen wir mit gleichen Abständen in zwei Reihen übereinander an und lassen dabei in Reihe I die Grundzahlen fort. Verbinden wir beide Reihen durch Striche, entsteht die folgende Skala.

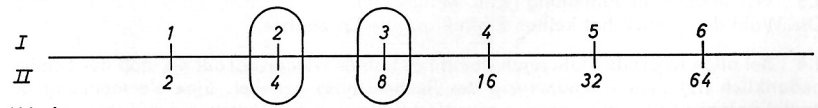


Abb. 4

Die Aufgabe $4 \cdot 8 = 32$ können wir jetzt mit der Tabelle oder mit der Skala lösen.

a) Lösung nach obiger Tabelle:
$(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

b) Lösung nach Abb. 4
Suche die Faktoren in Reihe II und entnimm die darüberstehenden Zahlen in Reihe I, addiere sie: $2 + 3 = 5$. Unter 5 in Reihe I steht das Ergebnis 32 in Reihe II.

Auch die Aufgabe $64 : 4 = 16$ läßt sich damit lösen:

Subtrahiere die über 64 und 4 stehenden Werte 6 und 2 der Reihe I ($6 - 2 = 4$). Unter 4 der Reihe I steht das Ergebnis 16 in Reihe II.

Trennen wir die Skalen I und II entlang der Längslinie, damit wir sie gegeneinander verschieben können, dann haben wir einen Rechenstab.

Warum beginnt die Skala II mit 1 als Stabanfang?

Aus dem „Anlegen" der Einheiten folgt, daß der Stabanfang keine Wertänderung hervorrufen darf. Beim Additionsstab (Abb. 1) bleibt $3 + 0 = 3$, beim Multiplikationsstab ist aber $3 \cdot 0 = 0$, daher muß hier mit 1 begonnen werden, denn $3 \cdot 1 = 3$.

2.4 Zur Abkürzung wird im folgenden die „Zahlenstrecke", d. h. die in Skala II angegebene Länge, kurz mit Z benannt. Z 2 heißt also die Länge der Zahlenstrecke 1 bis 2. Z 2 + Z 2 + Z 2 bedeutet, daß die Zahlenstrecke Z 2 dreimal hintereinander angelegt und damit die Multiplikation $2 \cdot 2 \cdot 2$ ausgeführt werden soll. Z 4 heißt die Zahlenstrecke 1 bis 4. Für Teilstrecken gilt die Bezeichnung: Z (4 bis 8), d. h. die Zahlenstrecke 4 bis 8.

2.5 Zum Aufbau der Rechenstab-Skala eignet sich am besten die Reihe der Zweierpotenzen, weil der Übergang von dieser Skala zur logarithmischen wegen $2^{10} \approx 10^3$ am leichtesten durchzuführen ist. Als Einheit für Z 2 wählen wir 3 cm, weil $\lg 2 = 0.301$ und damit Z 10 $\triangleq$ 10 cm. Es kann natürlich auch jede andere Einheit angenommen werden.

2.6 Auf zwei etwas über 30 cm langen Pappstreifen tragen wir die Einheitsstrecke Z 2 = 3 cm ab, dann tragen wir sie mit dem Zirkel nochmals an und schreiben an den Endpunkt 4, denn wir wollen die Multiplikation $2 \cdot 2 = 4$ (Z 2 + Z 2 = Z 4) ausführen (Abb. 5). Durch weiteres Antragen von Z 2 lösen wir nacheinander die Aufgaben $4 \cdot 2 = 8$, $8 \cdot 2 = 16 \ldots$ usw.

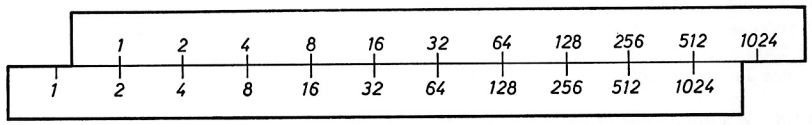


Abb. 5

2.7 Durch Verschieben der Streifen werden Multiplikationen, wie $16 \cdot 8$, $128 \cdot 4 \ldots$ und Divisionen, wie $512 : 16$, $64 : 32 \ldots$ usw., gelöst.

Auf dem Multiplikationsstab wird das Multiplizieren als Addition, das Dividieren als Subtraktion der entsprechenden Zahlenstrecken ausgeführt.

2.8 Wir könnten uns mit dieser Einführung begnügen, weil das Prinzip erkannt ist. Es liegt jedoch ein besonderer Reiz darin, auch die feinere Unterteilung der Rechenstabskalen mit einfachen Mitteln zu konstruieren, diese auf die Einheit von 250 mm zu bringen und dann mit der Grundskala D des Rechenstabes zu vergleichen.

3. Verschiedene Wege zur Feinteilung der Skala

Dieser Abschnitt wird mit größerer Ausführlichkeit behandelt, weil die Verfasser der Rechenbücher für das 9. Schuljahr verschiedene Wege gehen. Gleichzeitig wird aber hier die Möglichkeit geboten, eine Fülle der verschiedenartigsten Wiederholungsaufgaben durchzuführen, um die Unterteilung der Skala aufzubauen und damit die Einsicht in das Arbeiten mit dem Rechenstab zu vergrößern.

3.1 Die Schüler vermuten, daß in der Mitte der Zahlenstrecke auch der Mittelwert der Endzahlen liegt. Wir markieren sie vorsichtig (Abb. 6).

Die auf dem Rechenstab ausgeführte Multiplikation der angenommenen Zahlenwerte mit 2 oder 4 scheint die Richtigkeit zu bestätigen, denn es ist $1{,}5 \cdot 2 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$ und $1{,}5 \cdot 4 = 6$; $3 \cdot 4 = 12$.

Aber $3 \cdot 3$ gibt 8 (statt 9), $3 \cdot 1{,}5$ gibt 4 (statt 4,5) usw.

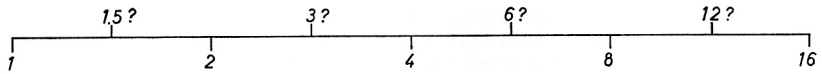


Abb. 6

3.1.1 Wo liegt der Fehler? Die Mitte zwischen 4 und 16 müßte 10 sein, ist aber auf unserer Einteilung 8! Genauso müßte zwischen 6 und 12 die Mitte 9 sein, ist aber in unserer Einteilung wieder 8. Dieser Weg ist falsch!

3.1.2 Stelle fest, wieviel Schritte über ganze Zahlen notwendig sind, um von 2 auf 4, 4 auf 8, ... 512 auf 1024 zu kommen?

Die Zahl der Teilstriche verdoppelt sich von Mal zu Mal, d. h. die Abstände zwischen den fortlaufenden Zahlen werden immer kleiner.

3.1.3 Wir berechnen den Teilstrich 1000 aus $1024-1000 = 24$ und stellen für die Einheit Z 2 $\triangleq$ 3 cm die Strecke für diese 24 Teilstriche fest.

$\frac{24}{512}$ von 3 cm $\approx$ 1,4 mm. $\frac{24}{1024}$ von 3 cm $\approx$ 0,7 mm

Unter Berücksichtigung, daß die Teilstrichabstände immer kleiner werden, legen wir fest, daß der Abstand 1024 bis 1000 etwa 1 mm ausmacht, d. h. wir können für unsere Berechnungen Z 1024 $\approx$ Z 1000 = 30 mm setzen.

Die jetzt folgenden Aufgaben lassen sich auch ohne Rechnung, nur mit Zirkel und Lineal lösen.

3.1.4 Aus der Haupteigenschaft des Rechenstabes findet man, da
Z 1000 = Z 10 + Z 10 + Z 10, daß Z 10 $\triangleq$ 1/3 Z 1000 und Z 100 $\triangleq$ 2/3 Z 1000.
(Z 1000 $\triangleq$ 30 cm), d. h. Z 10 $\triangleq$ 10 cm, Z 100 $\triangleq$ 20 cm, da der Bruchteil 1/3 mm sich in der Teilung nicht auswirkt.

3.1.5 Z 5 finden wir aus Z 10—Z 2 (10 : 2). Weiter sind nun leicht zu finden Z 20, Z 40, Z 80, Z 25, Z 50.

3.1.6 Suche Teilstrich für $9 \approx \sqrt{80}$, damit auch für 3.

7 aus $\sqrt{49}$, wobei 49 zwischen 48 ($6 \cdot 8$) und 50 ($5 \cdot 10$) liegt; 11 aus 55, zwischen 54 ($6 \cdot 9$) und 56 ($7 \cdot 8$); 13 aus 65, zwischen 64 und 66, usw. Hier bietet sich Gelegenheit zu stark vertiefender Eigentätigkeit der Schüler!

3.1.7 Nun zeigen wir, daß die Zahlenstrecke Z 10 bis 20 (Z 20 bis 50 usw.) die gleiche Länge hat wie Z 1 bis 2 (Z 2 bis 5 usw.).

Folgerung: Wir brauchen nur eine Skala mit Einteilungen von 1 bis 10 für unsere Rechnungen und lesen als Ergebnis nur die Ziffernfolge ab. Die wirkliche Größenordnung der Werte finden wir durch Überschlagsrechnung.

3.1.8 Weitere Zwischenwerte für die Unterteilung der Skala 1 bis 10 erhalten wir aus den Zahlenstrecken zwischen 1 und 100.

Beispiel: Z 2,5 $\triangleq$ Z (10 bis 25) oder (10 : 4) Z 10—Z 4 = Z 2,5.

3.1.9 Die Skala läßt sich durch Scherung vergrößern. Auf den normalen 25-cm-Rechenstab ist Z 1 bis 2 = 7,5 cm.

3.2 Prof. Drenckhahn[1]) erhält die Feinteilung durch Rechnung und Eingrenzung.

3.2.1 Ausgehend von der Teilung nach Zweierpotenzen berechnet er den „Streckenwert" (Z 3) durch Eingrenzung. Einheit für Z 2 $\triangleq$ 3 cm.

Der Teilstrich wird in der Mitte von Z (2 bis 4) bei der Länge 4,5 cm angenommen.

Addition der Z 3 + Z 3 ($3 \cdot 3$) gibt statt Z 9 nur Z 8, also einen zu kleinen Wert.

Der Teilstrich muß also rechts von 4,5 cm liegen.

Wählen wir Z 3 $\triangleq$ 5 cm, erhalten wir für $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (Z 3 + Z 3 + Z 3 $\triangleq$ 15 cm). Nach unserer Einteilung mit Z 2 $\triangleq$ 3 cm entspricht 15 cm aber der fünffachen Zahlenstrecke Z 2 $\triangleq 2^5 = 32$. Der Mittelwert 4,75 erscheint ausreichend.

3.2.2 Eine genauere Abschätzung folgt:

$3^5 = 243$ liegt zwischen $128 = 2^7$ und $256 = 2^8$. 243 liegt 13 Teile von 256 entfernt. Wir berechnen $\frac{13}{128}$ von 3 cm zu 0,305 cm, bezogen auf die Differenz der Teilstriche $2^8-2^7 = 128$. Demnach 243 $\triangleq$ 24 cm — 0,305 cm = 23,695 cm.

Da 3^5 durch fünfmaliges Antragen der Z 3 entsteht, erhalten wir Z 3 als fünften Teil dieser Strecke mit 4.74, also dicht an der oberen Grenze 4,75 cm.

Damit können wir auf dem Streifen festlegen:

a) alle Dreierpotenzen,

b) alle Produkte aus Zweier- und Dreierpotenzen.

3.2.3 Ähnlich lassen sich weitere Teilstriche der Primzahlen 5, 7, 11, 13... abgrenzen.

Beispiel: Der Teilstrich 5 ist gesucht.

Wir grenzen die Zahlenstrecke ein zwischen $24 = 2^3 \cdot 3$ und $25 = 5^2$.

a) $24 = 2^3 \cdot 3$, d. h. $3 \cdot 3$ cm + 4,8 cm = 13,8 cm
Aus der Halbierung erhalten wir Z 5 etwas größer als 6,9

b) $128 = 2^7$, d. h. $7 \cdot 3$ cm = 21 cm, wird verglichen mit $125 = 5^3$. Da die Zahlenstrecke von $\frac{3}{128} \cdot 3$ cm = 0,02 cm, die sich aus der Differenz ergibt, unberücksichtigt bleiben kann, wird 21 cm : 3 = 7 cm.

Der auf eine Dezimalstelle gerundete Mittelwert ergibt für den Teilstrich 5 die Zahlenstrecke 7 cm.

3.3 Prof. Breidenbach[2]) schlägt zur Feinteilung folgenden Weg vor:

3.3.1 Nach der üblichen Einführung über die Einteilung des Stabes in Zweierpotenzen zur Einübung der Multiplikation und Division bricht Prof. Breidenbach ab und versucht nun umgekehrt aus einer Feinteilung die gröbere Teilung zu gewinnen.

Er wählt als Ausgangsstrecke die Zahlenstrecke 1 bis 1,1 mit der Einheit 10 mm. Er erhält durch fortgesetztes Potenzieren von 1,1 die Einteilung
1 1,1 1,21 1,33 1,46 1,61 1,77 1,95 2,14.

---

[1]) Prof. Dr. F. Drenkhahn: Vom Rechenstab in der Volksschule, Pädagogische Blätter, Berlin Jahrg. 1956, Heft 1/2, und Sonderdruck für ARISTO-Werke · Dennert & Pape KG

[2]) Prof. W. Breidenbach: Methodik des mathematischen Unterrichts, Ernst Klett Verlag Stuttgart 1950

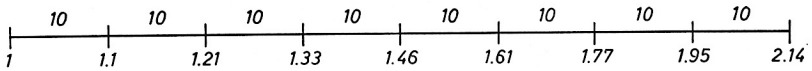


Abb. 7

Den Teilstrich 1,2 gewinnt er aus der Überlegung: von 1,1 bis 1,21 sind 11 Abschnitte, bis 1,2 nur 10 Abschnitte, also $\frac{10}{11}$ von 10 mm = 9,1 mm. Der Teilstrich 1,2 ist 10 mm + 9,1 mm = 19,1 mm von 1 entfernt.

3.3.2 Ebenso lassen sich die Teilstriche 1,3 bis 2 finden.
Noch genauer wird die Einteilung, wenn wir die Ausgangsstrecke 1 bis 1,01 wählen.

3.4 Ein weiterer Weg zur Berechnung einer Feinteilung ergibt sich aus der Frage, welcher Wert nun wirklich in der Mitte der Zahlenstrecken Z 2, Z (2 bis 4), Z (4 bis 8) usw. liegt. Die Einheit Z 2 = 3 cm.
In der Mitte zwischen Teilstrich 1 und 2 muß die Zahl stehen, die mit sich selbst multipliziert 2 ergibt: $\sqrt{2} = 1{,}41$.
Diese Zahl läßt sich auch leicht ohne Kenntnis der Wurzelrechnung durch Probieren bestimmen.
Mit einfacher Dreisatz- oder Proportionsrechnung lassen sich aus der Tatsache, daß Z 1,4 ≈ 1,5 cm ist, die noch fehlenden Teilstriche zwischen den Zweierpotenzen finden.

4. Das Ablesen der Skalen und die Überschlagsrechnung

4.1 Bevor wir mit dem Rechenstab zu arbeiten anfangen, müssen wir erst das Ablesen der Skalen wegen der ungleichmäßigen Unterteilungen üben. Die Abstände zwischen den Zahlen 1 bis 10 sind verschieden groß.

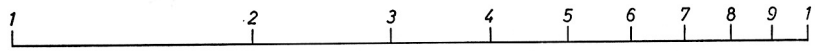
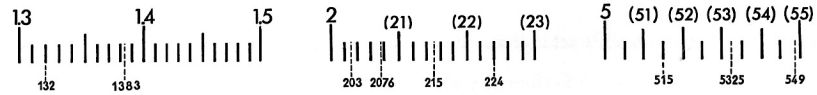


Abb. 8 Die Hauptintervalle

Zwischen 1 und 2 sind die Zehntel nochmals in Zehntel unterteilt, zwischen 2 und 3 in Fünftel und zwischen 4 und 10 nur halbiert.



Bereich 1—2 Bereich 2—4 Bereich 4—10
Abb. 9

Erfahrungsgemäß entstehen dadurch beim Ablesen leicht Fehler, in der Hauptsache folgende:

a) Die Null zwischen zwei Ziffern wird nicht beachtet, z. B. 1,03 und 1,3.
b) Die Fünftelteilung wird als Zehntelteilung eingestellt, z. B. 2,23 statt 2,26
c) Bei der Fünftelteilung macht das Einstellen der dritten und vierten Stelle oft Schwierigkeiten, z. B. 275, 2064.

4.2 Anfangs wird man die Einstellungen mit dem Läuferstrich üben, wobei es sich empfiehlt, die Einsen untereinanderzustellen oder die Stabzunge zu entfernen; später werden auch die Einstellungen mit C1 oder C10 durchgeführt. Erst wenn die Schüler in allen Skalenbereichen sicher einstellen und ablesen können, soll mit dem Rechnen begonnen werden.

4.3 Berechne: a) 5 · 1,25, b) 5 · 12,5, c) 5 · 125, d) 0,5 · 125
Wieviel Multiplikationen sind auszuführen? Nur eine, denn die Ziffernfolge bleibt immer die gleiche. Daher genügt für unsere Rechnungen zunächst die Skala 1 bis 10, die uns jedesmal die Ziffernfolge des Ergebnisses angibt. Die Größenordnung müssen wir durch Überschlagsrechnung feststellen. Aus diesem Grunde lesen wir die Ziffernfolge 625 als sechs—zwei—fünf ab und nicht als sechshundertfünfundzwanzig.

4.4 Bei der Überschlagsrechnung beachten wir folgende Empfehlungen:
Wir runden die Zahlen, indem wir

a) bei der Multiplikation eine Zahl aufrunden, die andere abrunden.
b) bei der Division beide Zahlen entweder auf- oder abrunden.

Es gibt keine festen Regeln. Vorrang hat die leichte und fehlerfreie Kopfrechnung.
Der Überschlag kann nur die Größenordnung, nicht aber das Ergebnis prüfen!

Beispiele:

Aufgabe	Überschlag	Ziffernfolge	Ergebnis
1,4 · 5,2	1 · 6 = 6	7—2—8	7,28
18,2 · 4,4	20 · 4 = 80	8—0—1	80,1
5,6 : 3,2	6 : 3 = 2	1—7—5	1,75
$\frac{3{,}2 \cdot 2{,}8}{8{,}2}$	9 : 8 ≈ 1	1—0—9—3	1,093

5. Allgemeines zum Rechenstab ARISTO-Junior

5.1 Die Handhabung des Rechenstabes
Zum Rechnen wird der Rechenstab am besten in die Hand genommen und so zum Licht gedreht, daß der Läuferstrich keine Schatten werfen kann. Das Einstellen der Zunge erfolgt am genauesten durch Druck und Gegendruck. Mit der einen Hand wird das herausragende Zungenende mit Daumen und Zeigefinger dicht hinter dem Rechenstabkörper umfaßt, so daß durch Bewegen der Finger bei gleichzeitigem Abstützen gegen den Stabkörper Zug und Druckbewegungen möglich sind. Mit der anderen Hand wird die obere Leiste des Rechenstabkörpers so umfaßt, daß die Daumenspitze einen Gegendruck auf das Zungenende ausüben kann.

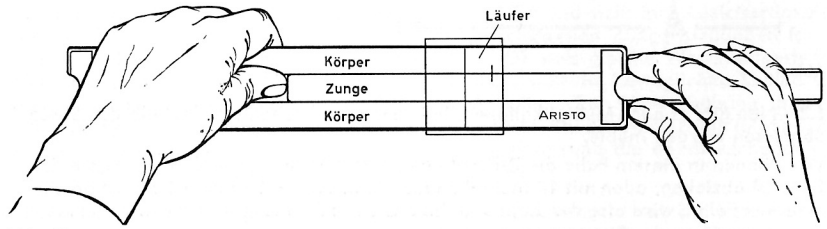


Abb. 10

5.2 Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im folgenden abgekürzt:

a) D 3 heißt: Einstellung der Zahl 3 auf der Teilung D und damit der Zahlenstrecke von 1 bis 3. Entsprechend werden die Zahlen der anderen Teilungen bezeichnet.

b) „Lies unter C 5 ab" heißt: Stelle die Zahl fest, die unter C 5 auf D steht.

c) Die Multiplikation auf dem Rechenstab bezeichnen wir mit (+), die Division entsprechend mit (—).
Die Aufgabe 1,5 · 3 wird dann als Anweisung D 1,5 (+) C 3 lauten.

d) Pfeile in den Zeichnungen deuten den Rechenweg oder die Verschiebung der Zunge bzw. des Läufers an.

5.4 Wichtig ist, daß der Schüler nun erkannt und begriffen hat, daß auf dem Stab nicht mit Zahlen, sondern mit ihren Zahlenstrecken gerechnet wird, daß wir mit einer Addition (Subtraktion) der Zahlenstrecken eine Multiplikation (Division) der Zahlen ausführen.

Je weiter er vom Rechenschema zur Rechenoperation kommt, desto leichter wird ihm das Rechnen fallen.

6. Multiplikation und Division

6.1 Aufgabe: 1,2 · 1,6 = 1,92

Einstellung: Stelle C 1 über D 1,2; lies unter C 1,6 das Ergebnis 1,92 ab.

D 1,2 (+) C 1,6 = D 1,92

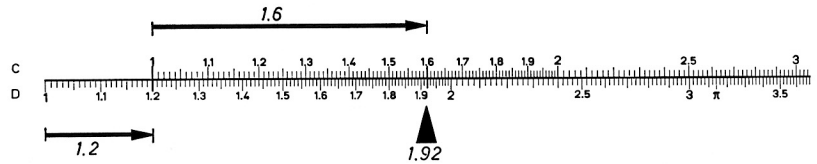


Abb. 11

6.2 Aufgabe: 1,92 : 1,6 = 1,2

Stelle C 1,6 über D 1,92 und lies D 1,2 unter C 1 ab.

D 1,92 (—) C 1,6 = D 1,2

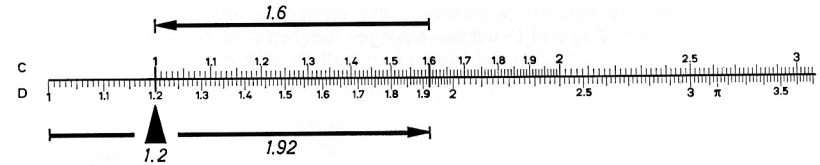


Abb. 12

6.3 Nun gibt es auch Multiplikationen, bei denen das Ergebnis außerhalb der Skala D abgelesen werden müßte.

Wir können in diesem Falle die Ziffernfolge durch 10 dividieren, d. h. die Skalenlänge 1 bis 10 abziehen, oder mit 10 multiplizieren, d. h. die Skalenlänge 1 bis 10 addieren. In diesen Fällen wird also der Zungenanfang C 1 mit dem Zungenende C 10 vertauscht, dann kann immer weitergerechnet werden.

6.4 Aufgabe: 8 · 6,5 = 52

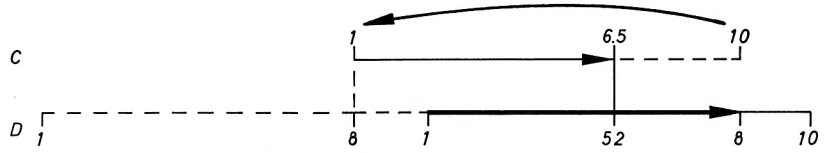


Abb. 13

Rechengang: Stelle C 1 über D 8. Unter C 6,5 kann nicht abgelesen werden. Teile 8 durch 10, d. h. schiebe die Zunge so weit nach links, daß C 10 über D 8 steht, lies unter C 6,5 das Ergebnis D 52 ab.

Diese Verschiebung der Zunge heißt Rückschlag oder Durchschieben der Zunge.

6.5 Aufgabe: 5,2:1,7 = 3,06

Rechengang: Stelle C 1,7 über D 5,2 und lies unter C 1 das Ergebnis 3,06 ab.

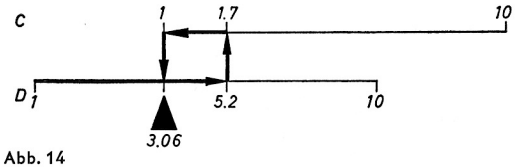


Abb. 14

6.6 Aufgabe: 52:6,5 = 8

Rechengang: Stelle C 6,5 über D 52. Das Ergebnis kann nicht unter C 1 abgelesen werden. Die Multiplikation mit 10 (C 1 bis C 10) zeigt unter C 10 das Ergebnis D 8.

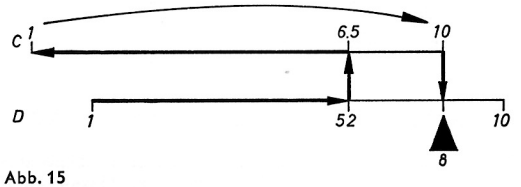


Abb. 15

Daraus ergibt sich: Bei einer Division ist die Ziffernfolge eines Ergebnisses immer unter dem Zungenende abzulesen, das sich innerhalb der Skala befindet. Die Division mit dem Rechenstab ist also einfacher als die Multiplikation. Im Kapitel 10 wird gezeigt, wie diese Erkenntnis nutzbar gemacht wird.

6.7 Es folgen nun zahlreiche Übungen zur Multiplikation und Division mit zwei Gliedern. Hier sollte sich nun die Einführung der „versetzten" Skalen CF und DF anschließen.

7. Das Rechnen mit den versetzten Skalen CF und DF

7.1 Diese Skalen könnten wie üblich erst erklärt und dann eingeführt werden. Vorteilhafter scheint der hier angegebene Weg zu sein. Während des Rechnens mit C und D beobachtet der Schüler die Skalen CF und DF und stellt ihre Gleichartigkeit mit den Grundskalen fest. Am besten wird bei verschiedenen Zungenstellungen festgestellt, daß unter C 1 auf D und über CF 1 auf DF stets gleiche Werte eingestellt sind. Das „über" und „unter" ist leicht verständlich, weil die beweglichen Skalen C und CF an den festen Skalen D und DF entlanggleiten. Zur Hervorhebung dieser Umkehrung sind die beweglichen Skalen gelb eingefärbt. Bei der zum Schluß folgenden Erklärung hat der Schüler dann nicht mehr das Gefühl (und die damit verbundene Hemmung), mit einer neuen Skala arbeiten zu müssen.

7.2 In der Grundstellung stehen sich auch CF 1 und DF 1 gegenüber. Die 1 steht etwa in der Mitte der Skala, daher auch die Bezeichnung: „Versetzte Skalen" (V. S.).

7.3 Stelle a) C 1 über D 2, CF 1 steht unter DF 2
b) C 10 über D 8, CF 1 steht unter DF 8.
CF 1 und DF 1 vertreten zugleich auch CF 10 und DF 10.

7.4 Berechne das Einmaleins mit der 3 auf C/D. Stelle C 1 über D 3.
Wir lesen ab 1 · 3 bis 3 · 3, dann nach „Rückschlag" 4 · 3 bis 10 · 3. Auf den Skalen CF/DF können wir aber ohne neue Zungeneinstellung 4 · 3 bis 10 · 3 ablesen. Über CF 4 steht DF 12 usw. Wir erhalten das ganze Einmaleins mit einer einzigen Einstellung. Die Skalen CF und DF ersparen uns den im Verlauf der Rechnung störenden Rückschlag.

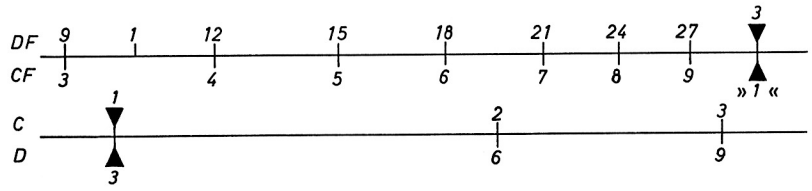


Abb. 16

7.5 Wir fangen mit den versetzten Skalen an, indem wir CF 1 unter DF 3 (rechts) stellen, dann haben wir wieder die gleiche Einstellung wie vorher in Abb. 16.

7.6 Verfolgen wir z. B. bei der Aufgabe 52 : 6,5 = 8 (s. Kap. 6.6) die Stellung der Zahlen auf CF/DF, so finden wir, daß sich auch hier DF 52 und CF 6,5 gegenüberstehen und daß über CF 1 das Ergebnis DF 8 steht. In den Skalenpaaren C/D und CF/DF stehen sich die gleichen Wertepaare gegenüber, d. h. der gleiche Rechenvorgang wird auf beiden Skalenpaaren ausgeführt.

8. Die Entstehung der Skalen CF und DF

8.1 Der lästige Rückschlag ließe sich auch vermeiden, wenn wir die Skalen C und D um eine Skalenlänge vergrößern würden. Damit wäre aber der Stab mit der doppelten Länge zu unhandlich.
Nimmt man nun das Mittelstück einer doppelten Grundskala und ordnet es über der einfachen Grundskala so an, daß die 1 (10) etwa in die Mitte kommt, so erhält man die „versetzten" Skalen CF und DF (Abb. 17).

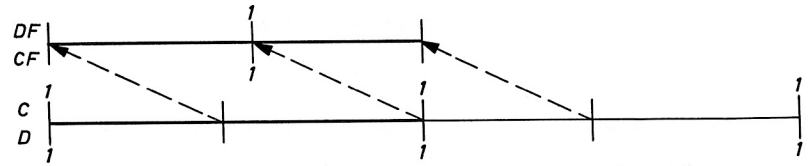


Abb. 17

Das Maß der Versetzung kann beliebig sein, nur soll die 1 der versetzten Skala etwa in der Mitte liegen (Mitte bei $\sqrt{10} = 3{,}162$), weil die Versetzung dann am wirkungsvollsten ist.

8.2 Welche Zahlen stehen auf DF über D 1 und D 10? Man hat den Wert $\pi = 3{,}14$ der Skalenmitte $\sqrt{10}$ vorgezogen, um damit einen weiteren Vorteil zu haben.

8.3 Betrachten wir die Skalen D und DF einerseits und C und CF andererseits, indem wir die Zunge am besten ganz herausziehen, so sehen wir, daß diese Skalen mit der Einstellung π gegenüber 1 praktisch eine ständige Multiplikationseinstellung für den Faktor π erhalten haben (Abb. 18).

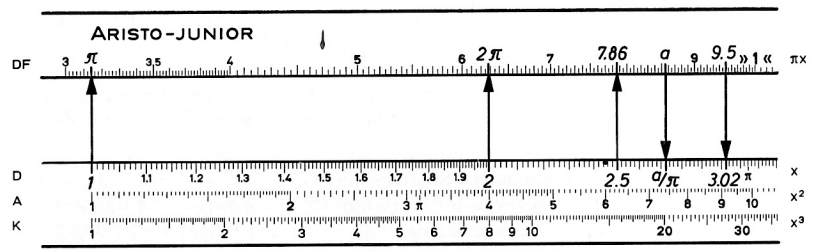


Abb. 18

8.4 Prüfe: 2,5 · π = 7,85. Stelle C 1 über D 2,5, unter C π steht D 7,85. Nun stelle mit dem Läuferstrich fest, daß über D 2,5 der gleiche Wert DF 7,85 steht.
Beim Übergang in der umgekehrten Richtung von DF nach D oder CF nach C findet eine Division durch π statt, z. B. 9,5 : π = 3,02.

8.5 Aufgabe: Gib den Umfang U = dπ des Kreises mit dem Durchmesser d = 5,5 cm an. Über D 5,5 steht DF 1727 (Überschlag 5 · 3 = 15)
Ergebnis: U = 17,27 cm.

8.6 Tabellenbildung: Stelle die Tabelle auf für y = 1,75 · x. (Etwa: 1 Stück kostet DM 1,75 oder Geldumrechnung usw.)
Beachte:
Bei den Tabellen und Multiplikationen möglichst mit den oberen Skalen beginnen, um gleich die richtige Zungeneinstellung zu erhalten, die kein Durchschieben erfordert.
Stelle CF 1 unter DF 1,75, lies unter C 1 bis C 5,7 auf D und von CF 3 über CF 10 bis CF 18 die zugehörigen Werte auf DF ab.

8.7 Teilung: Stelle die Tabelle für $y = \frac{x}{1{,}5} = \frac{1}{1{,}5} \cdot x$ auf.
Stelle C 1,5 über D 1 (oder CF 1,5 unter DF 1); zu jedem auf C oder CF eingestellten Dividenden (x) steht auf D oder DF der zugehörige Quotient.

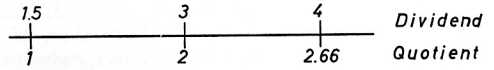


Abb. 19

9. Kettenaufgaben

9.1 Bei zusammengesetzten Aufgaben werden die nicht benötigten Zwischenergebnisse nicht abgelesen, sondern nur mit dem Läuferstrich festgehalten.
Die folgende mit genauen Anweisungen versehene Aufgabe wurde so einfach gewählt, daß eine Kontrolle der Zwischenergebnisse leicht möglich ist.

9.2 Beispiel: x = 5 · 4 · 6 · 7.
Überschlag: 20 · 40 = 800. Ergebnis dreistellig.
a) Ausrechnung nur mit den Skalen C/D.
Stelle C 1 über D 5, unter C 4 nicht ablesbar, daher Teilung durch 10 (Rückschlag!)
C 10 steht nun über D 5 (der geübte Rechner wird sofort mit dieser Einstellung beginnen, weil 4 · 5 > 10!).
Addition der Zahlenstrecke C (1 bis 4): der Läuferstrich wird über C 4 gestellt, um das Zwischenergebnis D 2 festzuhalten.
C 1 unter den Läuferstrich bringen. C 6 liegt rechts außerhalb: Erneuter Rückschlag! Läuferstrich auf C 6, darunter D 1,2.

C 1 wieder unter den Läuferstrich stellen. Addition der Zahlenstrecke C (1 bis 7), d. h. Läuferstrich über C 7 bringen und darunter D 8,4 ablesen.

Ergebnis: x = 840 (mit 5 Zungen- und 4 Läufereinstellungen)

Bei den Kettenmultiplikationen vereinfacht sich die Rechnung mit den kombinierten Skalen C/D und CF/DF, wenn jeder weitere Faktor von C 1 oder CF 1 aus als Zahlenstrecke angetragen wird.

b) Ausrechnung mit den kombinierten Skalen:

Stelle CF 1 unter DF 5. Läuferstrich auf C 4, da auf CF 4 unmöglich. C 1 unter Läuferstrich. Da unter C 6 kein Zwischenergebnis, stelle Läuferstrich über CF 6 (DF 1,2).

Nun CF 1 unter diesen Läuferstrich bringen. Das Ergebnis steht über CF 7 (DF 8,4) oder unter C 7 (D 8,4).

Ergebnis: x = 840 (mit 3 Zungen- und 3 Läufereinstellungen). Vergl. auch Kap. 10.

9.3 Aufgaben von der Form $\frac{a \cdot b}{c}$ lassen sich meistens mit einer einzigen Zungeneinstellung lösen, wenn mit der Division begonnen wird.

Beispiel: $x = \frac{4{,}5 \cdot 4}{1{,}7}$ Überschlag: $\frac{20}{2} = 10$ (zweistellig)

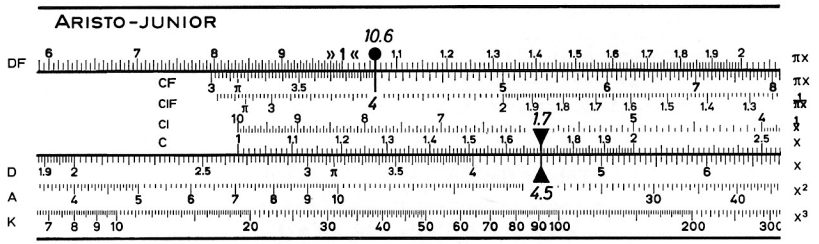


Abb. 20

Stelle C 1,7 über D 4,5. Diese erste Einstellung ist durch Pfeilspitzen gekennzeichnet (Zwischenergebnis unter C 1). Multiplikation mit 4: Läuferstrich über C 4 nicht möglich, daher Ergebnis über CF 4 auf DF ablesen: x = 10,6. Das Ergebnis ist durch den dicken Punkt an der Ablesestelle hervorgehoben.

10. Die gegenläufigen (inversen) Skalen CI und CIF

10.1 Früher wurde zur Lösung gewisser Aufgaben die C-Skala gegenläufig eingesteckt. Als Verbesserung entstand die gegenläufige Skala CI. Sie ist zur Unterscheidung rot beziffert. Ihre Anwendungsmöglichkeit ist weit größer, als man anfangs annimmt.

10.2 Statt des Rechnens mit reziproken Werten, das dem Schüler erfahrungsgemäß viel Schwierigkeiten bereitet, sollte man beim Rechnen mit der Skala CI einfach davon ausgehen, daß die entsprechenden Zahlenstrecken auf C und CI gleich lang sind, aber nur in umgekehrter Richtung verlaufen.

Beispiel: 2 · 4 = 8. Die Zahlenstrecke Z (1 bis 4) liegt auf CI als Zahlenstrecke CI (4 bis 1) am rechten Ende. Dadurch wird es uns ermöglicht, durch Anlegen der Zahlenstrecke CI (4 bis 1) an D 2 die Aufgabe 2 · 4 zu lösen (Abb. 21) und unter CI 1 das Ergebnis D 8 abzulesen. Da 2 · 4 = 4 · 2 = 8, stehen sich nicht nur D 2 und CI 4, sondern auch D 4 und CI 2 einander gegenüber.

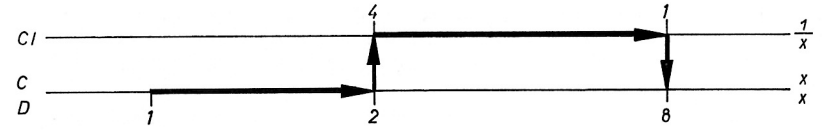


Abb. 21

Auf einen bei Schülern sehr beliebten Ablesefehler sei noch hingewiesen: Die zweite und dritte Ziffer der Ziffernfolge steht in den Skalen CI und CIF links, nicht rechts der Hauptbezifferung!

10.3 Nachdem verschiedene Übungsaufgaben mit den Skalen D und CI geübt worden sind, lohnt es sich, die Skala CIF einzuführen, die in Verbindung mit Skala DF den gleichen Zweck erfüllt, wenn mit den oberen Skalen DF und CF gerechnet wird. Die Rechenregeln sind die gleichen wie die im vorhergehenden Kapitel erarbeiteten, denn die Skala CIF wird leicht als gegenläufige Skala zu CF und DF erkannt und bei Wiederholung des in Abb. 21 dargestellten Beispieles zeigt sich der gleiche Lösungsweg.

Werden DF 4 und CIF 2 übereinandergestellt, stehen auch D 4 und CI 2 übereinander. Das Ergebnis 8 kann über CIF 1 in DF oder unter CI 1 in D abgelesen werden.

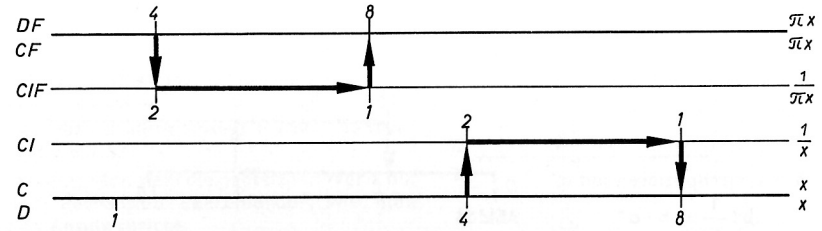


Abb. 22

Das Beispiel 3 · 4 führt gleichfalls zu derselben Erkenntnis, nur wird das Ergebnis diesmal nicht unter CI 1, sondern unter CI 10 abgelesen.

Natürlich kann das Ergebnis auch in jedem Fall über CF 1 auf DF abgelesen werden (vgl. Kap. 7.1).

10.4 Die Multiplikation wird somit ebenso einfach wie die Division mit dem Rechenstab, denn beim Multiplizieren mit der Skala CI entfällt die Überlegung, mit welchem Zungenende die Rechnung begonnen werden soll.

Bei der Berechnung von Kettenaufgaben kann das lästige Durchschieben der Zunge eingespart werden. Darin ergänzen sich die Kehrwertskalen und die versetzten Skalen auf das Beste.

10.5 Unsere Musteraufgabe x = 5 · 4 · 6 · 7 erhält nun noch folgenden abgekürzten Lösungsweg: Stelle CI 4 über D 5. Das Zwischenergebnis 20 steht dann unter C 1, so daß der Faktor 20 für die nächste Multiplikation mit 6 bereits eingestellt ist. Stelle nun den Läufer auf CF 6 (bei C 6 keine Ablesung!), womit das Zwischenergebnis 120 gleichfalls unter dem Läufer auf DF eingestellt ist. Jetzt ist es wieder einfacher, den letzten Faktor 7 auf CIF unter den Läufer zu bringen und das Ergebnis DF 840 über CF 1 oder unter C 10 abzulesen. Es werden nur noch 2 Zungen- und 2 Läufereinstellungen gemacht (vgl. Kap. 9.2).

10.6 Hier müßte zur Vertiefung und Förderung der Sicherheit im Stabrechnen eine längere Ruhepause mit viel Übungsaufgaben eingelegt werden, die teils mit C/D und CI, oder in Verbindung mit CF/DF und CIF zu lösen sind. Manche Aufgaben lassen sich einfacher lösen, wenn mit der oberen Skalengruppe begonnen wird, z. B.

7 · 8 · 9 oder 1,2 · 1,4 · 1,5!

10.7 Erst später wird man dann noch zeigen, daß sich auf der C- und CI-Skala die Kehrwerte der Zahlen gegenüberstehen. Die Begründung ergibt sich aus folgender Tatsache: Teilt man eine Skala des Rechenstabes an einer beliebigen Stelle a, so muß das Reststück den Zahlenwert $\frac{1}{a}$ haben.

Es muß $Z\,a\,(+)\,Z\,\frac{1}{a} = Z\,10$ sein. Da für 10 und 1 die gleiche Ziffernfolge gilt, ist also $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

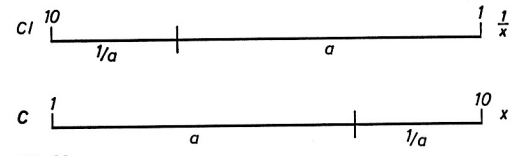


Abb. 23

10.8 Diese Tatsache bringt für den Rechenstab weitere Rechenvorteile:

a) Tragen wir die Zahlenstrecke CI (10 bis a) an die Zahlenstrecke D b an, so multiplizieren wir mit $\frac{1}{a}$, d.h. wir teilen durch a.

$$b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

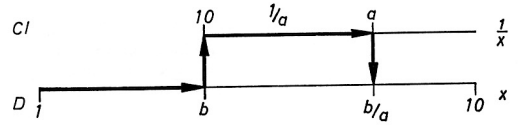


Abb. 24

Ziehen wir dagegen die Zahlenstrecke CI (a bis 10) ab, so dividieren wir durch $\frac{1}{a}$, d.h. wir multiplizieren mit a.

$$b : \frac{1}{a} = b \cdot a$$

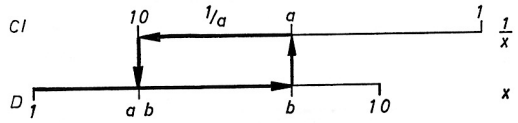


Abb. 25

b) Stellen wir D b und CI a übereinander, so haben alle auf D und CI übereinanderstehenden Zahlen das gleiche Produkt a · b, das wir unter CI 1 oder CI 10 ablesen können. (Anwendung bei Dreisätzen mit umgekehrten Verhältnissen.) Umgekehrt können wir ebenso ein Produkt in zwei Faktoren zerlegen!

11. Die Goldene Regel des Stabrechnens

11.1 Eine andere Betrachtungsweise, die man mit Recht als die „Goldene Regel" des Stabrechnens bezeichnet hat, führt uns zu einer überraschenden Fülle einfachster Lösungsmöglichkeiten. Entsprechend der in Kap. 1 mit dem Additionsstab gemachten Erfahrung, daß sich bei jeder Einstellung lauter Subtraktionen ablesen lassen, deren Ergebnis konstant ist, erhalten wir beim Multiplikationsstab lauter Divisionen, deren Quotient konstant ist.

11.2 Betrachten wir die Gleitlinie zwischen Zunge und fester Skala als Bruchstrich, dann können bei einer beliebigen Zungeneinstellung gleichwertige Brüche durch Verschieben des Läufers eingestellt werden.

Beispiel: Stelle C 1 über D 2. Suche gleichwertige Brüche

a) auf C/D $\quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots .$,

b) auf CF/DF $\quad \frac{3}{6} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \ldots .$

Beachte ferner:

c) daß diese Bruchgleichungen auch als $\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \ldots .$ gelesen werden können.

d) Es bleibt sich also gleich, ob der Zähler auf dem Körper (weiß) und der Nenner auf der Zunge (gelb) eingestellt wird oder ob die Einstellung umgekehrt begonnen wird. Wir müssen nur im Verlauf der Rechnung bei der einmal getroffenen Entscheidung bleiben.

11.3 Wir können jeden eingestellten Bruch

a) erweitern oder kürzen, indem wir den Läufer verschieben,

b) in einen Dezimalbruch verwandeln, indem wir dessen Ziffernfolge gegenüber der entsprechenden 1 oder 10 des Körpers ablesen. Die Kommastellung ist durch Überschlag zu berechnen.

11.4 Bei der Lösung einer Proportion a : b = c : d, die besser als Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben wird, ist zu drei gegebenen Größen die vierte zu finden. Damit können wir Dreisatzaufgaben und Proportionen mit einer einzigen Zungeneinstellung lösen!

11.5 Eine Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ oder Dreisatzaufgabe mit geradem Verhältnis führt bei der schriftlichen Rechnung jedesmal zu dem Lösungsschema $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

Für den Rechenstab schreiben wir jede derartige Aufgabe als Bruchgleichung und setzen die gegebenen Größen übereinander. Diese Einstellungen geben uns die Möglichkeit, zu drei gegebenen („gesetzten") Größen die vierte zu finden und damit Dreisatzaufgaben zu lösen. Dabei ist es gleich, ob wir eine Proportion oder einen Ansatz zugrundelegen.

Aufgabe: a Stück kosten b DM, wie teuer sind c Stück?

Lösung: Man stellt die gegebenen Werte auf dem Rechenstab übereinander, wie man den Ansatz spricht

(a Stück : Preis b = c Stück : Preis x) (Abb. 26).

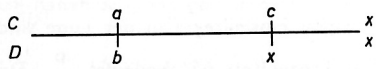


Abb. 26

Dann haben wir nämlich gleich die farbliche Trennung für Stückzahlen und Preise. Aus der ersten Einstellung ist dann klar ersichtlich, wo weitere Stückzahlen eingestellt und wo die Preise abgelesen werden. (Abb. 27)

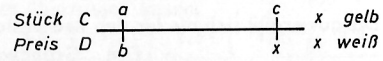


Abb. 27

Die Einstellung ermöglicht zugleich die Aufstellung von Tabellen mit einer einzigen Grundstellung. Wird die Proportion umgewandelt in a : c = b : x, dann entfällt die wertvolle Farbregel und es kommt zur Verwechslung der Skalen, wenn sich nur Stückzahlen oder Preise gegenüberstehen.

Beispiel:

5 Stück kosten DM 3,50. Wie teuer sind 8 Stück? (DM 5,60)

Wieviel Stück bekommt man für DM 4,90? (7 Stück)

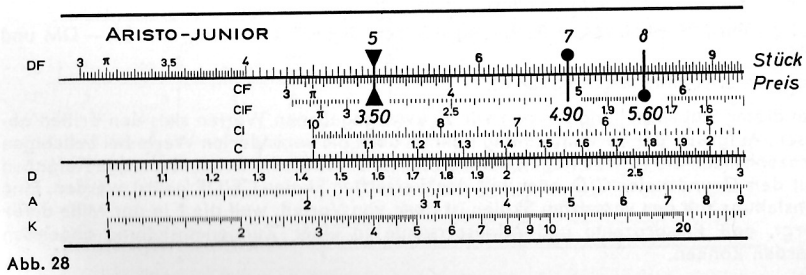


Abb. 28

Die farbliche Trennung der Sorten eignet sich für alle derartigen Berechnungen, z. B. zur Umrechnung von Geldsorten, Zoll in cm, Grad Réaumur in Grad Celsius usw.

11.6 Da das umgekehrte Verhältnis zur Produktgleichheit führt, verwenden wir für Dreisatzaufgaben mit umgekehrtem (ungeradem) Verhältnis die Kehrwertskalen CI und CIF anstelle von C und CF. Nach Kap. 10.2 stehen dann die entsprechenden Werte übereinander, deren Produkt gleich ist.
Wir stellen ein wie wir sprechen:
Für 7 Kühe reicht das Futter 56 Tage, für 8 Kühe x Tage.

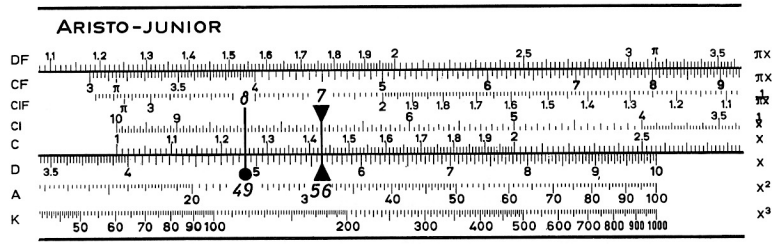


Abb. 29

12. Die Prozentrechnung

12.1 Eine Krönung der „Goldenen Regel" ist wohl die Tatsache, daß wir mit einer einzigen Einstellregel in der Lage sind, die ganze Prozentrechnung durchzuführen.

Der Prozentsatz p% bedeutet $\frac{p}{100}$. Das Verhältnis p : 100 ist gleich dem Verhältnis Prozentwert : Grundwert oder

Prozentwert : Grundwert = Prozentsatz : 100

Daraus ergibt sich die für den Rechenstab günstige Bruchgleichung:

$$\frac{DM}{\%} = \frac{\text{Grundwert}}{100} = \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Prozentsatz}}$$

in der wieder die Sortentrennung durchgeführt ist.

Beispiel: 18% von 450,— DM sind 81,— DM
(Einer dieser Werte soll als unbekannt gesucht werden)

a) Berechne 18% von 450,— DM

b) 18% entsprechen 81,— DM? Welcher Grundwert liegt zugrunde?

c) Wieviel % sind 81,— DM von 450,— DM?

Die Einstellung ist bei allen drei Aufgaben die gleiche.

Für die Aufgabe a) werden 450,— DM und 100% übereinandergestellt und bei 18% der Prozentwert 81,— DM abgelesen (Abb. 30).

Bei Aufgabe b) beginnt die Rechnung mit der Gegenüberstellung von 81,— DM und 18%.

Aufgabe c) beginnt wie Aufgabe a).

Bei dieser Stabeinstellung können wir zu zwei gegebenen Werten stets den dritten ablesen. Aufgrund der Sortentrennung können auch die veränderten Werte bei beliebigen Prozentsätzen als Tabelle abgelesen werden. Grundsätzlich können derartige Aufgaben mit den Grundskalen C/D oder mit den versetzten Skalen CF/DF gelöst werden. Eine Einstellung mit den versetzten Skalen ist aber von Vorteil, weil die 1 in der Mitte dafür sorgt, daß Plusprozente und Minusprozente in einer Zungeneinstellung abgelesen werden können.

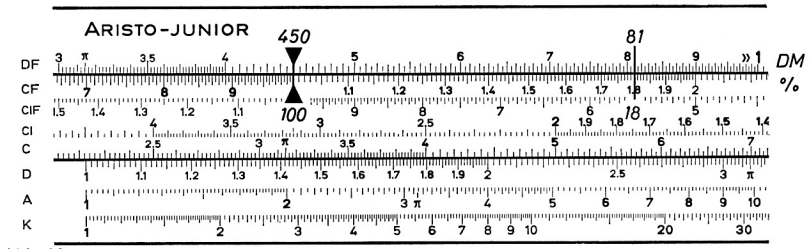


Abb. 30

12.2 Vermehrter und verminderter Grundwert

Mit der gleichen Einstellung lassen sich statt der einzelnen Aufschläge sofort die veränderten Werte ablesen. Solche Aufgaben finden wir bei der Kalkulation (Gewinn, Verlust, Rabatt, Skonto, Brutto-Netto usw.).
Wir überlegen:
Aus 100% des Grundwertes werden 100% + p% (bzw. 100% − p%). Das ist der einzige Fall, in dem die Prozente addiert bzw. subtrahiert werden dürfen! Daran ändert sich nichts, wenn der Grundwert sich ändert. Daraus ergibt sich die Proportion:

Grundwert : 100% = veränderter Wert : 100 ± p%

12.3 Man kann auch allgemeiner argumentieren, daß der veränderte Wert sich aus dem Grundwert K und dem Prozentwert $K \cdot \frac{p}{100}$ zusammensetzt.

$$\text{Veränderter Wert} = K \pm K \cdot \frac{p}{100} = K \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

Daraus ergibt sich die Proportion:

$$\text{Grundwert} : 1 = \text{veränderter Wert} : \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

Die folgende Tabelle zeigt die zueinander gehörenden Werte für p und $1 \pm \frac{p}{100}$, die sich auf die versetzten Skalen des Rechenstabes übertragen lassen.

0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	»1«	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
−50%	−40%	−30%	−20%	−10%	0	+10%	+20%	+30%	+40%	+50%

Von der »1« in der Mitte ausgehend, können wir an den bezifferten Teilstrichen den Wert p, um jeweils 10% steigend oder fallend, abzählen; dazwischen liegen die Teilstriche für die Einer.
Im folgenden Beispiel wird die Einstellung der Prozente mit der Skala CF vorgenommen. Der Vorteil dieser Einstellung erweist sich bei Kalkulationen (vgl. Kap. 12.5).
Beispiel: Bei einem Aufschlag von 18% wachsen 450,— DM auf 531,— DM an. Zwei Werte sollen gegeben sein, der dritte ist gesucht.
Um wieder die Sortentrennung zu erreichen, sprechen wir je nach den gegebenen Stücken: 450,— DM entsprechen 100%; 531,— DM entsprechen 118%; oder gemäß Kap. 12.3: $450,— \text{ DM} : 100 = 531,— \text{ DM} : 100 + \frac{p}{100}$.

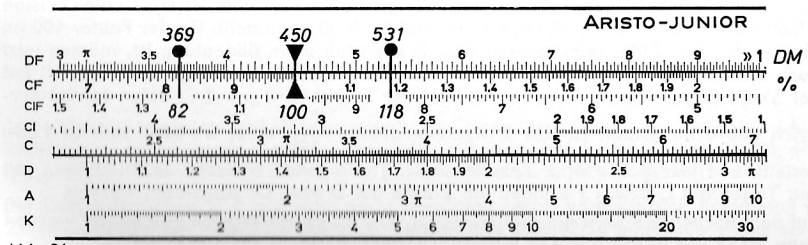


Abb. 31

Zur genaueren Berechnung kann bei derartigen Aufgaben mit der gleichen Zungeneinstellung bei p = 18% der Prozentwert abgelesen werden (vergl. Abb. 30).

Für die Überschlagsrechnung gehen wir am besten von der Überlegung aus, daß 100,— DM mit dem Aufschlag von 18% auf 118,— DM vermehrt werden.

Beachte: Bei dem um 18% verminderten Wert wird 100% − 18% = 82% in Skala CF eingestellt und das Ergebnis 369,— DM abgelesen (vergl. Abb. 31).

12.4 Folgen mehrere prozentuale Aufschläge (Kalkulation) hintereinander, errechnen wir den vermehrten Wert nach dem ersten Aufschlag, betrachten diesen als neuen Grundwert, stellen 100% bzw. die 1 auf Skala CF unter diesen Wert (Läuferstrich) und schlagen erneut auf. Die Zwischenwerte werden nicht abgelesen, sondern gleich für die Weiterrechnung benutzt.

12.5 Besonders günstig ist die Einstellung bei Verteilungsaufgaben.

Beispiel: Ein Betrag von 87500 DM ist so zu verteilen, daß A = 45000 DM, B = 10500 DM, C = 22400 DM und D den Rest erhält. Gib die prozentuale Verteilung an.

Lösung: Mit der Überlegung 87500 DM ≙ 100% ist die Einstellung festgelegt. Wir stellen CF 1 unter DF 875. Auf DF stehen dann die DM-Beträge, darunter auf CF die entsprechenden Prozentsätze. Der Übergang zu den Skalen D/C ist möglich.

(A ≙ 51,4%; B ≙ 12%; C ≙ 25,6%; D ≙ 11%)

13. Die Zinsrechnung

13.1 Zinsen lassen sich nach den bekannten Formeln oder Ansätzen wie Kettenaufgaben (Kap. 9) berechnen. Dazu bedarf es hier keiner besonderen Erklärung. Wir können aber auch die eben aufgestellte „Goldene Regel" der Prozentrechnung anwenden, wenn wir die Tatsache berücksichtigen, daß p% in i Jahren die gleichen einfachen Zinsen bringen wie p i% in einem Jahr.

Die Proportion ist dann: $K : Z = 100 : p \cdot i$

13.2 Rechenvorteile mit Läufer und CI-Skala

Bei der Zinsrechnung ergeben sich oft Multiplikationen oder Divisionen mit 360. Bei den kaufmännischen Rechenstäben hat man deshalb die Skalen CF/DF um 360 versetzt. Zur Ergänzung ist auch auf dem Läufer des ARISTO-Junior eine kleine Marke rechts vom Läuferstrich so angebracht, daß beim Übergang von C auf CF oder D auf DF die auf den Grundskalen C bzw. D eingestellte Zahl a als 3,6 a auf CF bzw. DF erscheint. Wichtiger ist aber, daß ein mit der Marke 360 auf DF eingestellter Wert b unter dem Läuferstrich auf D die Ablesung b/360 gestattet.

Damit wird die Berechnung von Tageszinsen nach der Formel $Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{360 \cdot 100}$ vereinfacht, denn stellen wir das Kapital K mit der Läufermarke 360 auf Skala DF ein, ist die Division K/360 unter dem Hauptstrich des Läufers auf Skala D eingestellt. Da der Faktor 100 im Nenner für das Ziffernrechnen mit dem Rechenstab ohne Bedeutung ist, müssen jetzt noch zwei Multiplikationen durchgeführt werden, die am besten gemäß Kap. 10 mit der Skala CI vereinfacht werden. Als nächster Schritt wird p auf CI unter den Läuferstrich gebracht. Damit ist das Zwischenergebnis $\frac{K \cdot p}{100}$ unter C 1 oder über CF 1 eingestellt, und wir haben eine Tabellenstellung: Zu jeder weiteren Multiplikation mit den Tagen auf C bzw. CF können die Zinsen auf D bzw. DF abgelesen werden.

Auf dem Rechenstab sieht das viel einfacher aus, als es mit Worten geschildert werden kann, denn wir haben nur eine einzige Zungeneinstellung vorzunehmen.

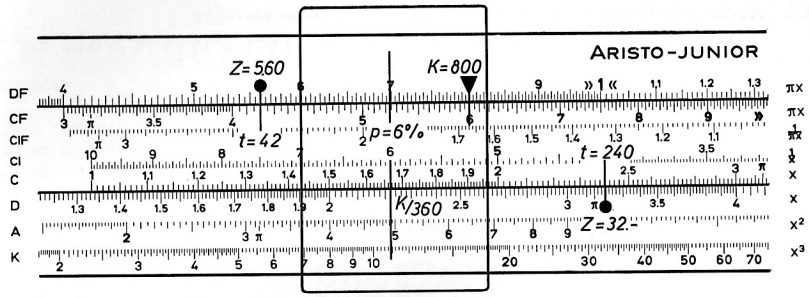


Abb. 32

Beispiel: 800,— DM bringen bei Verzinsung mit 6% in 42 Tagen Zinsen in Höhe von 5,60 DM. In 240 Tagen betragen die Zinsen 32,— DM.

14. Quadrate und Quadratwurzeln

14.1 Auf dem Rechenstab ARISTO-Junior befindet sich eine Skala A, die zweiteilige Quadratskala. Sie hat die halbe Einheit der Skala D, so daß sie zweimal nebeneinander angeordnet die Länge von D hat. Damit ist jede Zahlenstrecke auf D doppelt so groß wie die entsprechende auf A.

Z a auf D ≙ 2 · Z a auf A d.h.

Z a (+) Z a = Z a^2

Der auf D eingestellten Zahl a steht auf A das entsprechende Quadrat a^2 gegenüber.

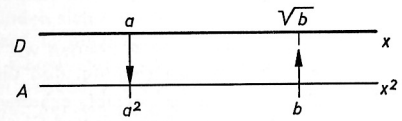


Abb. 33

14.2 Beim Quadrieren stellt man die Grundzahl auf D ein und liest auf A das Quadrat ab.

Beim Wurzelziehen stellt man umgekehrt den Radikanden auf A ein und liest die Quadratwurzel auf D ab.

Wir lassen die Schüler diese Tatsache selbst finden, indem wir zu Einstellungen auf D 2, D 3,.... die Werte auf A und dann zu Einstellungen auf A : 4, 9, 16.... 100 die Werte auf D ablesen lassen.

14.3 Beim Quadrieren wird die Größenanordnung durch Überschlagsrechnung festgestellt. Zur Erleichterung des Quadrierens sind die Einsen mit 1, 10 und 100 beziffert, denn $1^2 = 1$; $3{,}16^2 = 10$; $10^2 = 100$. Für Zahlen von 1 bis 10 sind die Quadrate direkt ablesbar. Alle anderen Zahlenwerte werden am besten auf diese Werte zurückgeführt:

$$21^2 = (2{,}1 \cdot 10)^2 = 2{,}1^2 \cdot 10^2 = 4{,}41 \cdot 100 = 441 \quad \text{(a in Abb. 34)}$$

$$0{,}21^2 = \left(\frac{2{,}1}{10}\right)^2 = \frac{2{,}1^2}{10^2} = \frac{4{,}41}{100} = 0{,}0441$$

14.4 Beim Radizieren haben wir wegen der doppelten Einheit zu beachten: Alle Radikanden mit ungerader Stellenzahl werden auf der linken Einheit (A 1 bis A 10), alle mit gerader Stellenzahl auf der rechten Einheit (A 10 bis A 100) eingestellt.

Bei Dezimalbrüchen < 1 teilt man die Ziffernfolge rechts vom Komma beginnend in Zweiergruppen ein. 0,00|25|4 hat z. B. gerade und 0,00|02|54 ungerade Stellenzahl.

14.5 Auch beim Radizieren können wir den Radikanden zerlegen

$$\sqrt{150} = \sqrt{1{,}5 \cdot 100} = 10 \cdot \sqrt{1{,}5} = 10 \cdot 1{,}225 = 12{,}25 \quad \text{(b in Abb. 34)}$$

$$\sqrt{0{,}150} = \sqrt{\frac{15}{100}} = \frac{1}{10} \cdot \sqrt{15} = \frac{1}{10} \cdot 3{,}87 = 0{,}387 \quad \text{(c in Abb. 34)}$$

$$\sqrt{0{,}00254} = \sqrt{\frac{25{,}4}{100 \cdot 100}} = \frac{1}{100} \cdot \sqrt{25{,}4} = \frac{5{,}05}{100} = 0{,}0505$$

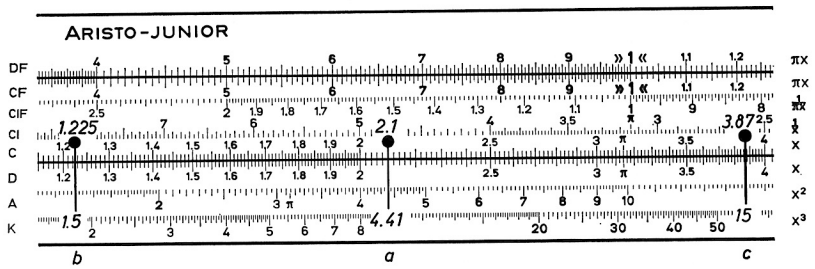


Abb. 34

Es wird jeweils der Faktor 100 abgespalten bzw. eine Zweiergruppe abgestrichen, bis unter der Wurzel eine Zahl zwischen 1 und 100 übrigbleibt. Werte zwischen 1 und 10 werden im linken Teil, Werte zwischen 10 und 100 im rechten Teil der Skala A eingestellt. Die Kommastellung ergibt sich dann aus der Zahl der abgespaltenen Faktoren 100.

14.6 Auch ohne die Skala A können wir mit den Grundskalen quadrieren und radizieren, denn aus der Überlegung, daß die Zahlenstrecke a, zweimal aneinandergelegt, die Zahlenstrecke a^2 ergibt, erhalten wir eine einfache Multiplikationsaufgabe, die am besten mit den Skalen D und CI gelöst wird.

Wir stellen über D a jetzt CI a und lesen an dem Stabende, das gerade über D steht, auf D ab. (Kap. 10)

Das Ziehen der Quadratwurzel ergibt sich als umgekehrter Weg des Quadrierens, d. h. wir suchen die auf D und CI bzw. DF und CIF übereinandergestellten gleichen Zahlen, wenn der Radikand auf D (bzw. DF) mit dem Zungenindex 1 eingestellt ist.

15. Kuben und Kubikwurzeln

15.1 Die Kubikskala K hat als Einheit ein Drittel der Einheit der Grundskala D. Damit ist jede Zahlenstrecke auf D dreifach so groß wie auf K, d. h. es steht a (auf D) dem Kubus a^3 auf K gegenüber und umgekehrt dem Wert b auf K steht $\sqrt[3]{b}$ auf D gegenüber (vgl. 14.1).

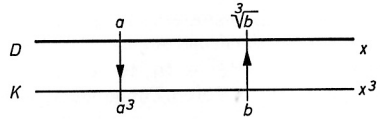


Abb. 35

15.2 Man verfährt beim Kubieren bzw. beim Ziehen der Kubikwurzel in gleicher Weise wie in 14.2, nur benutzt man die Skalen D und K. Zur Erleichterung des Ablesens sind die Abschnitte mit 1, 10, 100, 1000 beziffert.

15.3 Die Übungen beginnen am besten mit den Einstellungen $2{,}15^3 = 10$; $4{,}64^3 = 100$; $10^3 = 1000$, damit die drei Skalenabschnitte der Skala K und die entsprechenden Bereiche in Skala D erfaßt werden. Erst dann folgen Übungen in den verschiedenen Skalenabschnitten: $1{,}3^3 = 2{,}20$; $2{,}6^3 = 17{,}60$; $7{,}8^3 = 450$.

Umgekehrt ist $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt[3]{216} = 6$; $\sqrt[3]{21{,}6} = 2{,}78$; $\sqrt[3]{2{,}16} = 1{,}292$;
Beim Einstellen des Radikanden in Skala K muß der richtige Skalenabschnitt gewählt werden.

15.4 Beim Kubieren werden die Zahlen in ein Produkt oder einen Quotienten aus einer einstelligen Zahl und Zehnerpotenzen zurückgeführt.
Beispiele:

a) $21^3 = (2{,}1 \cdot 10)^3 = 2{,}1^3 \cdot 10^3 = 9{,}26 \cdot 1000 = 9260$

b) $0{,}25^3 = (2{,}5 : 10)^3 = 2{,}5^3 : 10^3 = 15{,}6 : 1000 = 0{,}0156$

15.5 Entsprechend Kap. 14.5 müssen wir beim Ziehen der Kubikwurzel den Radikanden durch Abspalten von Dreiergruppen (Potenzen von 10^3) auf den Skalenbereich 1 bis 1000 zurückführen.
Beispiele:

a) $\sqrt[3]{1670} = \sqrt[3]{1{,}67 \cdot 1000} = \sqrt[3]{1{,}67} \cdot \sqrt[3]{1000} = 1{,}186 \cdot 10 = 11{,}86$

b) $\sqrt[3]{0{,}0344} = \sqrt[3]{34{,}4 : 1000} = \sqrt[3]{34{,}4} : \sqrt[3]{1000} = 3{,}25 : 10 = 0{,}325$

c) $\sqrt[3]{0{,}343} = \sqrt[3]{343 : 1000} = \sqrt[3]{343} : \sqrt[3]{1000} = 7 : 10 = 0{,}7$

16. Läufermarken

16.1 Rechts und links vom Läuferstrich befinden sich die Marken d und V. Sie ermöglichen, einen gegebenen Durchmesser d auf D einzustellen, die Kreisfläche q mit dem mittleren Läuferstrich auf A oder das Kugelvolumen V mit der linken Marke V auf K abzulesen. Umgekehrt kann man bei gegebenem V oder q auf der Skala K bzw. A beginnen und den Durchmesser unter der Marke d auf D ablesen.

Wir stellen den gegebenen Wert ein und lesen den gesuchten Wert einfach ab (Abb. 36).

In der Technik werden Kreisflächen und Kugelvolumen mit dem Durchmesser nach folgenden Formeln berechnet:

$$q = \frac{\pi}{4} d^2; \quad V = \frac{\pi}{6} d^3 \quad \text{oder}$$

$$d^2 = q \cdot \frac{4}{\pi}; \quad d^3 = V \cdot \frac{6}{\pi}$$

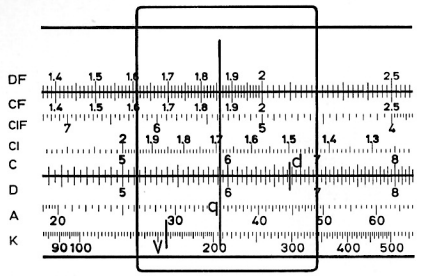


Abb. 36

Die Bildlänge q bis d^2 auf A entspricht der Bildlänge $\frac{4}{\pi}$ auf A bzw. $\sqrt[2]{\frac{4}{\pi}}$ auf D; ebenso entspricht die Bildlänge von V bis d^3 der Bildlänge $\frac{6}{\pi}$ auf K bzw. $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ auf D.

16.2 Im Kapitel 13.3 ist beschrieben, wie der kurze Läuferstrich, der rechts vom Mittelstrich über den Skalen CF und DF angeordnet ist, die Zinsrechnung vereinfacht. Der Faktor mit der Ziffernfolge 36 spielt eine weitere Rolle bei Zeit-, Geschwindigkeits- und Winkelumrechnungen.

1 Stunde	≙ 3600 Sekunden	1°	≙ 3600″
1 m/s	≙ 3,6 km/h	1 Jahr	≙ 360 Tage
100 %	≙ 360° (bei Kreisdiagrammen)		